PRUEBA N^{O}2

"XVIII JUEGOS MATEMÁTICOS INTER-REGIONALES"

I. **EJERCICIOS DE DESARROLLO**: (5 ptos c/u)

1. Un bote navega por un río recorriendo 15 kilómetros en 1,5 horas a favor de la corriente y 12 kilómetros en 2 horas contra la corriente. Hallar la velocidad del bote en agua tranquila y la velocidad del río o corriente del río. Recuerde que: $\text{Tiempo} = \dfrac{\text{distancia}}{\text{velocidad}}$

Solución

Sean V_{fc}: velocidad a favor de la corriente y V_{cc}: velocidad en contra de la corriente

$$V_{fc} = \frac{15}{1{,}5} = 10 \text{ km/hr} \quad \text{y} \quad V_{cc} = \frac{12}{2} = 6 \text{ km/hr}$$

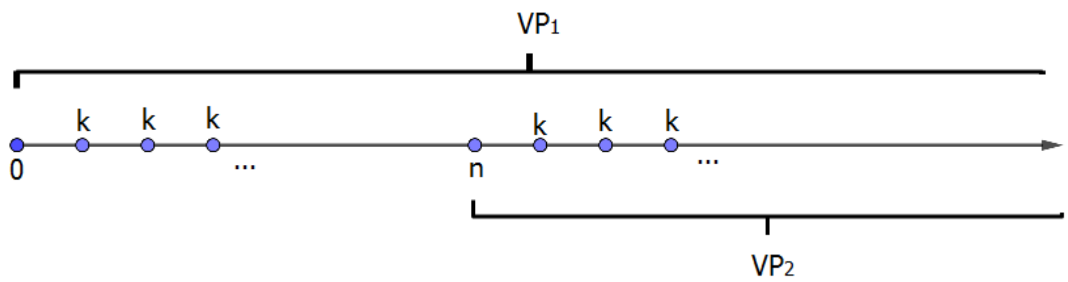
Sean x: velocidad del bote agua tranquila e y : velocidad de la corriente del río.
Luego
$x + y = 10$
$x – y = 6$
Obteniendo $X = 8$ e $y = 2$.
Por lo tanto la velocidad del bote en agua tranquila es 8 km/hrs y la velocidad de la corriente del río es 2 km/hrs.

2. Si un monto de dinero "C" se recibe en forma periódica todos los años hasta el infinito, y la tasa de interés de cada período es igual a "r", entonces el valor en el período cero o valor presente de ese flujo infinito es igual a: $\dfrac{c}{r}$.
Recuerda que, valor futuro de un monto de dinero que se invierte por n periodos es igual a:
$VF = C(1+r)^n$

Demuestra que el valor actual o presente de un flujo de dinero "K" recibido por "n" años (finito), con una tasa de interés "r" es igual a:

$$\frac{k}{r}\left(1 - \frac{1}{(1+r)^n}\right)$$

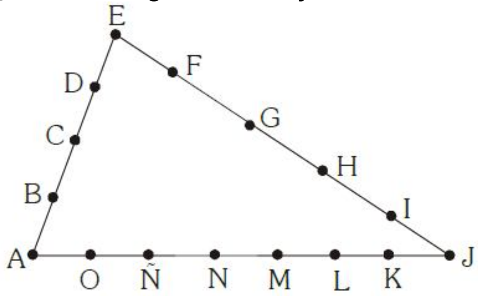
Solución



$VP_1 = \dfrac{k}{r}$ (flujo infinito en 0) $\qquad VP_2 = \dfrac{k}{r(1+r)^n}$ (flujo infinito en período "n")

Flujo finito: $VP_1 - VP_2 = \dfrac{k}{r} - \dfrac{k}{r(1+r)^n} = \dfrac{k}{r}\left(1 - \dfrac{1}{(1+r)^n}\right)$

3. En un triángulo, se marcan los puntos A, B, C, D,..., O, como se muestra en la figura, ¿cuántos segmentos hay en total?



N° de segmentos: $\frac{n(n+1)}{2}$

Lado AE: $\frac{4\cdot 5}{2}=10$

Lado EJ: $\frac{5\cdot 6}{2}=15$

Lado AJ: $\frac{7\cdot 8}{2}=28$

Por lo tanto hay en total 53 segmentos.

II. Determina la alternativa correcta, debes dejar el desarrollo: (2 ptos c/u)

1. En una caja fuerte hay \$101.000 en 28 billetes de \$2.000 y \$5.000. ¿Cuántos billetes de \$5.000 hay en la caja fuerte?

Sean x: cantidad de billetes de \$2.000 e y: cantidad de billetes de \$5.000.

$x + y = 28$
$2000x + 5000y = 101000$

Luego x = 13 e y = 15, por lo tanto hay 15 billetes de \$5.000.

A) 10 B) 14 C) 13 D) 15 E) 20

2. ¿Qué valor debe tener "k" para que la función $y = 5x^2 - 4kx + 12$ intercepte a la abscisa en 2?

Intersecta al eje x en el punto (2, 0), por lo que al reemplazar:
$0 = 5 \cdot 4 - 8k + 12$

Se obtiene que k = 4

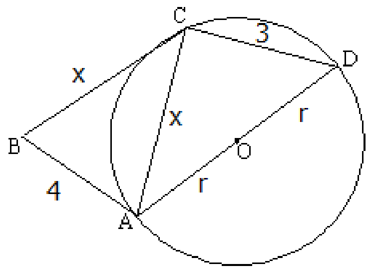
A) -4 B) 1 C) -1 D) 4 E) 8

3. El largo de un rectángulo mide 5 cm más que su ancho. Si disminuimos el ancho en 2 cm, el área del nuevo rectángulo es de 60 cm^2. ¿Cuál es el ancho y el largo del rectángulo original?

Rectángulo original Ancho: x y largo: x + 5
Nuevo rectángulo Ancho: x – 2 y largo: x + 5 Área = (x - 2)(x + 5) = 60.
Por lo que al resolver la ecuación $x^2 + 3x - 10 = 60$, se obtiene x = 7.
Luego el ancho y el largo del rectángulo original es 7 y 12 cm.

A) 10 y 7 B) 7 y 12 C) 7 y 15 D) 7 y 10 E) 10 y 15

4. En la figura, el triángulo ABC es isósceles de base AB y perímetro 20, ¿cuál es el área del círculo de centro O? Si AB=4, CD=3 y AD diámetro.



x + x + 4 = 20, luego x = 8.
El triángulo DCA es rectángulo en C, por lo que: $8^2 + 3^2 = 4r^2$

Luego $r^2 = \frac{73}{4}$

Por lo el área del círculo es $\pi r^2 = \frac{73}{4}\pi$

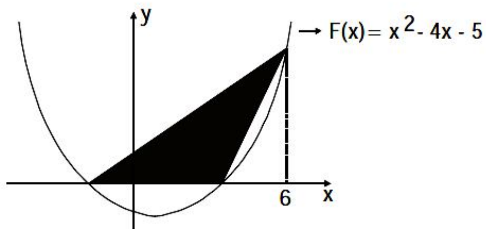
A) 20π B) $36{,}5\pi$ C) $6{,}25\pi$ D) $18{,}25\pi$ E) 16π

5. Sean x e y números reales y sean a, b y c, números complejos, tal que: $a = 5x + (3y)i$, $b = 4 + 2i$, $c = 9 + 8i$. Determina los valores de x e y que cumplen la ecuación $a + b = c$.

Como 5x + (3y)i + 4 + 2i = 9 + 8i
Luego 5x + 4 = 9 y 3y + 2 = 8, por lo tanto x = 1 e y = 2

A) -1 y 2 B) 0 y 1 C) 0 y 2 D) 1 y 2 E) 2 y 2

6. Hallar el área de la región sombreada



F(6) = 36 – 24 – 5 = 7, lo que corresponde a la altura del triángulo.
Intersección de la parábola eje x
$x^2 - 4x - 5 = 0$, luego $x_1 = -1$ y $x_2 = 5$. Por lo que la base del triángulo mide 6.
Luego el área del triángulo es 21.

A) 21 B) 42 C) 28 D) 14 E) 24

7. Dado el triángulo ABC cuyos vértices son A= (-5, -1), B= (2, 0) y C= (-2 , a). Para qué valor de "a" el triángulo será rectángulo en C?

Sean m_{AC} : pendiente del segmento AC y m_{BC} : pendiente del segmento BC

$$m_{AC} = \frac{a+1}{-2+5} = \frac{a+1}{3} \qquad m_{BC} = \frac{a-0}{-2-2} = -\frac{a}{4}$$

El segmento AC perpendicular al segmento BC si $m_{AC} \cdot m_{BC} = -1$

Luego $\frac{a+1}{3} \cdot -\frac{a}{4} = -1$

$a^2 + a - 12 = 0$, obteniendo a = -4 o a = 3

A) -4 B) 3 C) 4 o -3 D) -4 o 3 E) -4 o -3

8. Al racionalizar la expresión $\frac{2}{\sqrt[3]{5}+\sqrt[3]{-3}}$ se obtiene:

Utilizando $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$

$$\frac{2}{\sqrt[3]{5}+\sqrt[3]{-3}} \cdot \frac{\left(\sqrt[3]{5}\right)^2 - \sqrt[3]{5}\cdot\sqrt[3]{-3} + \left(\sqrt[3]{-3}\right)^2}{\left(\sqrt[3]{5}\right)^2 - \sqrt[3]{5}\cdot\sqrt[3]{-3} + \left(\sqrt[3]{-3}\right)^2} = \frac{2\left(\left(\sqrt[3]{5}\right)^2 - \sqrt[3]{5}\cdot\sqrt[3]{-3} + \left(\sqrt[3]{-3}\right)^2\right)}{5-3}$$

A) $2\left(\sqrt[3]{5}-\sqrt[3]{-3}\right)$

B) $\sqrt[3]{5}-\sqrt[3]{-3}$

C) $\left(\sqrt[3]{5}-\sqrt[3]{-3}\right)^2$

D) $\left(\sqrt[3]{5}\right)^2 + \sqrt[3]{-15} + \left(\sqrt[3]{-3}\right)^2$

E) $\left(\sqrt[3]{5}\right)^2 - \sqrt[3]{-15} + \left(\sqrt[3]{-3}\right)^2$

9. A un cierto número se eleva al cuadrado, a este resultado se le resta 14, a este nuevo resultado se multiplica por 6, dividimos entre 4, después lo elevamos al cubo, luego le agregamos 9; finalmente extraemos la raíz cuadrada, obteniendo como resultado final 6. Entonces el número es :

Al resolver:

$$\sqrt{\left(\frac{(x^2-14)\cdot 6}{4}\right)^3 + 9} = 6$$ se obtiene x = 4

A) 12

B) 6

C) 2

D) 16

E) 4

10. Sea $x = 3^{\log_3 z}$ y $z = 2y^2$. El valor de "x" cuando y=3 es:

Z = 2 · 9 = 18

$x = 3^{\log_3 18}$

X = 18

A) 12

B) 15

C) 18

D) 21

E) 27