

PRUEBA N°1  
"XVIII JUEGOS MATEMÁTICOS INTER-REGIONALES"

Solucionario

I. EJERCICIOS DE DESARROLLO. ARGUMENTA TU RESPUESTA.

(5 pts c/u)

1. Las siguientes bandejas, están ordenadas de manera creciente, según sus pesos.



Bandeja I



Bandeja II



Bandeja III

Si se desea ubicar una cuarta bandeja, que tiene un círculo, un triángulo y un cuadrilátero, idénticos a los anteriores, para mantener el orden, ¿Dónde hay que ubicarla?

SOLUCIÓN:

De las bandejas I y II se tiene que:

$$2\triangle + \square < 2\circ + \square$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \triangle < \circ \quad / + \square \\ \triangle + \square < \circ + \square \quad / + \triangle \\ 2\triangle + \square < \circ + \square + \triangle \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \triangle < \circ \quad / + \square \\ \triangle + \square < \circ + \square \quad / + \circ \\ \triangle + \square + \circ < 2\circ + \square \end{aligned}$$

Por lo tanto  $2\triangle + \square < \circ + \square + \triangle < 2\circ + \square$

Luego se ubica entre las bandejas I y II.

2. Si  $S$  asigna a cada número natural la suma de sus dígitos, por ejemplo  $S(1936) = 1 + 9 + 3 + 6 = 19$

Calcula el valor de  $S(10^{2017} - 2017)$

SOLUCIÓN:

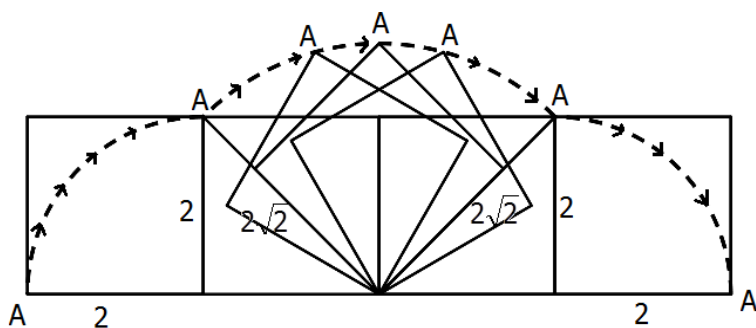
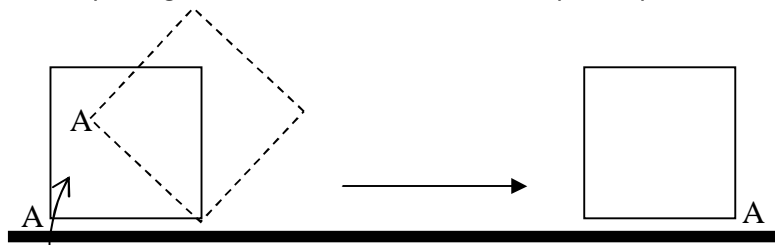
$$\begin{aligned} (10^{2017} - 2017) &= \underbrace{100000\dots 00000}_{2017\text{-ceros}} - 2017 \\ &= \underbrace{9999\dots 9999}_{2013\text{-nueves}}7983 \end{aligned}$$

Luego

$$\begin{aligned} S(10^{2017} - 2017) &= \underbrace{9 + 9 + 9 + 9 + \dots + 9 + 9 + 9 + 9}_{2013\text{-nueves}} + 7 + 9 + 8 + 3 \\ &= 9 \cdot 2013 + 7 + 9 + 8 + 3 \\ &= 18.144 \end{aligned}$$

Por lo tanto  $S(10^{2017} - 2017) = 18.144$

3. La figura se tiene un cuadrado de lado 2 cm que rueda (sin resbalar) hasta que el vértice A vuelve a tocar el piso. ¿Cuál es la distancia recorrida por el punto A?



Primero recorre un cuarto de una circunferencia de radio 2, es decir,  $\frac{1}{4} \cdot 2\pi \cdot 2 = \pi$  cm

Luego un cuarto de una circunferencia de radio  $2\sqrt{2}$ , es decir,  $\frac{1}{4} \cdot 2\pi \cdot 2\sqrt{2} = \sqrt{2}\pi$  cm

Finalmente un cuarto de una circunferencia de radio 2, es decir,  $\frac{1}{4} \cdot 2\pi \cdot 2 = \pi$  cm

Por lo tanto el punto A recorrió  $(\pi + \sqrt{2}\pi + \pi)$  cm, es decir,  $\pi(\sqrt{2} + 2)$  cm.

**II. DETERMINA LA ALTERNATIVA CORRECTA. JUSTIFICA EN CADA CASO. (2 ptos. c/u)**

1. Un número capicúa (que se lee de igual forma de izquierda a derecha y viceversa, ej 123.321) de 4 cifras es tal que la diferencia entre la unidad y la decena, en ese orden, es 3. Si el número se divide por 11, ¿Cuál es la cifra de las decenas del cociente?

Número:  $1000x + 100y + 10y + x$

$$U - D = 3$$

$$x - y = 3$$

$$x = 3 + y$$

Reemplazamos en el número

$$1000(y + 3) + 100y + 10y + (3 + y)$$

$$= 3003 + 111y$$

$$= 11(273 + 101y)$$

Luego si el número se divide por 11 se obtiene como cociente  $(273 + 101y)$ .

$$273 + 101y$$

$$= 200 + 70 + 3 + 100y + y$$

$$= 100(y + 2) + 10 \cdot 7 + (3 + y)$$

Por lo tanto la cifra de la decena es 7.

A) 1

B) 2

C) 3

D) 5

**E) 7**

2. En la enumeración de las páginas del libro EL HOBBIT, se utilizaron 2013 dígitos. ¿Cuántas páginas tiene el libro?

x : número de páginas

Páginas 1 a la 9  $\Rightarrow$  9 dígitos

Páginas 10 a la 99  $\Rightarrow$   $2 \cdot 90 = 180$  dígitos

Páginas 100 a la x  $\Rightarrow$   $3 \cdot (x - 100 + 1)$  dígitos

$$\text{Luego } 9 + 180 + 3 \cdot (x - 100 + 1) = 2013$$

$$\text{Por lo tanto } x = 707$$

A) 705

B) 706

**C) 707**

D) 708

E) 709

3. En matemáticas, se tiene libertad para definir operaciones, por ejemplo si  $a$  y  $b$ , son números racionales, definimos la operación  $\diamond$  entre  $a$ ,  $b$  como

$$a \diamond b = a + b + a \cdot b$$

Por ejemplo  $1 \diamond 2 = 1 + 2 + 1 \cdot 2 = 5$ .

Además, para cada tres números  $a$ ,  $b$  y  $c$  escribimos  $a \diamond b \diamond c = (a \diamond b) \diamond c$ .

El valor de  $1 \diamond \frac{1}{2} \diamond \frac{1}{3} \diamond \frac{1}{4} \diamond \dots \diamond \frac{1}{2017}$

$$1 \diamond \frac{1}{2} = 1 + \frac{1}{2} + 1 \cdot \frac{1}{2} = 2$$

$$1 \diamond \frac{1}{2} \diamond \frac{1}{3} = 2 \diamond \frac{1}{3} = 2 + \frac{1}{3} + 2 \cdot \frac{1}{3} = 3$$

$$1 \diamond \frac{1}{2} \diamond \frac{1}{3} \diamond \frac{1}{4} = 3 \diamond \frac{1}{4} = 3 + \frac{1}{4} + 3 \cdot \frac{1}{4} = 4$$

$$1 \diamond \frac{1}{2} \diamond \frac{1}{3} \diamond \frac{1}{4} \diamond \frac{1}{5} = 4 \diamond \frac{1}{5} = 4 + \frac{1}{5} + 4 \cdot \frac{1}{5} = 5$$

Luego

$$\begin{aligned} 1 \diamond \frac{1}{2} \diamond \frac{1}{3} \diamond \frac{1}{4} \diamond \dots \diamond \frac{1}{2017} &= 2016 \diamond \frac{1}{2017} \\ &= 2016 + \frac{1}{2017} + 2016 \cdot \frac{1}{2017} \\ &= 2017 \end{aligned}$$

A) 0

B)  $\frac{1}{2017}$

C) 1

D) 2017

E)  $\frac{2016}{2017}$

4. Si se toman todos los divisores positivos de todos los divisores positivos del número 20 y se multiplican se obtiene:

Divisores de 20:  $\{1, 2, 4, 5, 10, 20\}$

Divisores de los divisores de 20:

$$D_1 = \{1\}$$

$$D_2 = \{1, 2\}$$

$$D_4 = \{1, 2, 4\}$$

$$D_5 = \{1, 5\}$$

$$D_{10} = \{1, 2, 5, 10\}$$

$$D_{20} = \{1, 2, 4, 5, 10, 20\}$$

$$2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 10 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 10 \cdot 20$$

$$= 2^4 \cdot 4^2 \cdot 5^3 \cdot 10^2 \cdot 20$$

$$= 2^4 \cdot 2^4 \cdot 5^3 \cdot 2^2 \cdot 5^2 \cdot 2^2 \cdot 5$$

$$= 2^{12} \cdot 5^6$$

A)  $2^6 5^6$

B)  $2^6 5^{12}$

C)  $2^{12} 5^6$

D)  $2^{12} 5^{10}$

E)  $2^{12} 5^{12}$

5. Sea  $f$  una función tal que  $f(0) = 4$  y  $f(n) = 3 \cdot f(n-1) + 4$ , con  $n$  un número natural.

El valor de  $f(3)$  es igual a

$$\begin{aligned} f(3) &= 3 \cdot f(3-1) + 4 \\ &= 3 \cdot f(2) + 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(2) &= 3 \cdot f(2-1) + 4 \\ &= 3 \cdot f(1) + 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(1) &= 3 \cdot f(1-1) + 4 \\ &= 3 \cdot f(0) + 4 \\ &= 3 \cdot 4 + 4 \\ &= 12 + 4 \\ &= 16 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Luego} \\ f(2) &= 3 \cdot f(1) + 4 \\ &= 3 \cdot 16 + 4 = 52 \\ f(3) &= 3 \cdot f(2) + 4 \\ &= 3 \cdot 52 + 4 = 160 \end{aligned}$$

A) 45

B) 50

C) 52

D) 60

E) 160

6. Se tiene una vasija con vino puro, a la cual se le agregó la décima parte de su volumen de agua, obteniéndose una mezcla que vale \$2.500 pesos por litro. ¿Cuál es el precio de medio litro de vino puro?

$$\begin{array}{ccc} \boxed{10 \text{ L}} & + & \boxed{1 \text{ L}} & = & \boxed{11 \text{ L}} \\ \text{Vino Puro} & & \text{Agua} & & \text{Mezcla} \end{array}$$

$$1 \text{ litro de mezcla} \Rightarrow \$2.500$$

$$11 \text{ litros de mezcla} \Rightarrow \$27.500$$

De los 11 litros de mezcla, 10 litros son de vino puro

$$\Rightarrow \frac{27500}{10} = 2.750 \text{ litro de vino puro.}$$

A) \$1.250

B) \$1.375

C) \$2.750

D) \$13.750

E) Ninguna de las anteriores

7. En el colegio "Pitágoras" a cada estudiante se le asigna un código el cual consiste de dos letras y cuatro números. Al momento de realizar la matrícula, la secretaria del colegio le ha preguntado a Alex por su código pero este no lo recuerda. Sin embargo, Alex recuerda que la parte numérica está compuesta por los números 2, 3, 5 y 7, aunque no recuerda en qué orden, y recuerda que las letras que componen su código son dos letras distintas que se encuentran en su nombre. ¿Cuántos posibles códigos tendrá que verificar la secretaria del colegio para determinar cuál de todos ellos es el de Alex?

Letras :  $L = \{A, L, E, X\}$     Números :  $N = \{2, 3, 4, 7\}$     Código: 2 letras distintas y 4 números

$$L_1 \cdot L_2 \cdot N_1 \cdot N_2 \cdot N_3 \cdot N_4$$

$$\underbrace{4 \cdot 3 \cdot 4}_{12} \cdot \underbrace{3 \cdot 2 \cdot 1}_{24}$$

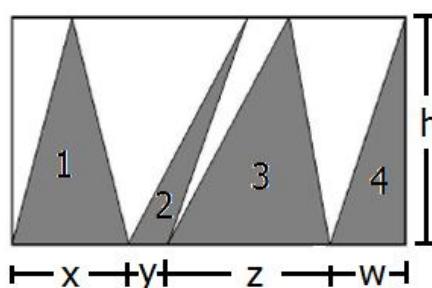
Por lo tanto 288, son los posibles códigos.

- A) 8                      B) 144                      C) 210                      **D) 288**                      E) Infinitos

8. El área del rectángulo dado es 12. ¿Cuál es el área de la figura sombreada?

- A) 3  
B) 4  
C) 5  
**D) 6**  
E) N. A

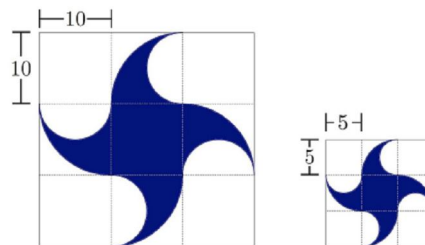
$$\begin{aligned} A &= A_1 + A_2 + A_3 + A_4 \\ &= \frac{x \cdot h}{2} + \frac{y \cdot h}{2} + \frac{z \cdot h}{2} + \frac{w \cdot h}{2} \\ &= \frac{h \cdot (x + y + z + w)}{2} = \frac{12}{2} = 6 \end{aligned}$$



9. Felipe tiene un molino de viento más grande que el de su hermano menor, como se muestra en las figuras, y quiere saber por cuánto su molino supera el de su hermano. ¿Cuál es la razón entre el área del molino de Felipe y el de su hermano?

Observación: Las curvas corresponden a cuartos de circunferencia y a semicircunferencias.

$$\left. \begin{aligned} \text{A) } \frac{1}{2} \quad & A_{\text{Felipe}} = 10^2 + 10^2 \pi - 2 \cdot 5^2 \pi \\ & = 100 + 50\pi = 50 \cdot (2 + \pi) \\ \text{B) } 1 \\ \text{C) } 2 \\ \text{D) } 3 \\ \text{E) } 4 \quad & A_{\text{hermano}} = 5^2 + 5^2 \pi - 2 \cdot (2,5)^2 \pi \\ & = 25 + 12,5\pi = 12,5 \cdot (2 + \pi) \end{aligned} \right\} \frac{50 \cdot (2 + \pi)}{12,5 \cdot (2 + \pi)} = 4$$



10. En la figura se muestran dos pentágonos regulares, el valor del ángulo x es

- A)  $27^\circ$                        $\triangle ACD \cong \triangle BCF$   
B)  $58^\circ$                        $180^\circ - x + 4 \cdot 108^\circ - y + y + = 540^\circ$   
C)  $60$                        $x = 72^\circ$   
**D)  $72^\circ$**   
E)  $80^\circ$

