



XIX JUEGOS MATEMÁTICOS INTER-REGIONALES 2018

ORGANIZA:

Área de Matemática del Colegio San Mateo Osorno

COLABORAN:

**Colegio Alemán de Temuco
Colegio Windsor School de Valdivia
Colegio San Francisco Javier de Puerto Montt
Colegio Cahuala de Castro
Liceo San Felipe Benicio de Coyhaique**

INTRODUCCIÓN

Los Juegos Matemáticos es un certamen de resolución de ejercicios y problemas dirigido a los/as estudiantes con habilidades en Matemática de Séptimo Básico a Cuarto Medio.

La competencia se realizará por equipos, para lo cual cada Establecimiento podrá presentar 2 EQUIPOS por SERIE, en caso que el Establecimiento tenga Enseñanza Básica y Media. En Caso que el Establecimiento tenga sólo Enseñanza Básica o sólo Enseñanza Media, podrá presentar 3 EQUIPOS por SERIE, entre las series de 7º - 8º Básico, 1º- 2º Medio y 3º - 4º Medio.

Se pretende con esto que los/as estudiantes se interesen y motiven por aprender más, a través de la investigación individual y grupal. Que exista el diálogo y la discusión entre los/as jóvenes matemáticos/as sobre conceptos, propiedades y formas de resolución de diversos problemas por su propia iniciativa y puedan desarrollar al máximo todas sus potencialidades.

En el presente año 2018 los establecimientos colaboradores y sedes para rendir pruebas son: Colegio Alemán de Temuco, Colegio Windsor School de Valdivia, Colegio San Francisco Javier de Puerto Montt, Colegio Cahuala de Castro y Liceo San Felipe Benicio de Coyhaique.

A continuación daremos un listado de ejercicios para practicar que han sido preguntados en pruebas de años anteriores:

SERIE 1° - 2° MEDIO

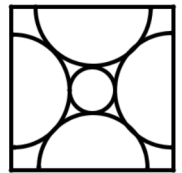
$$1. \left(\frac{a^{-1}}{a^0 + \left(\frac{a}{b}\right)^{-1}} \right)^{-2} - \left(\frac{ab^{-1} - b^0}{b^{-1}} \right)^2 =$$

2. Tres vasijas contienen agua. Si se vierte $\frac{1}{3}$ del contenido de la primera en la segunda, después $\frac{1}{4}$ del contenido que hay ahora en la segunda en la tercera y, por último, $\frac{1}{10}$ del agua que hay ahora en la tercera en la primera, entonces cada vasija contendrá 9 litros.
¿Qué cantidad había inicialmente en cada vasija?

3. Si $2p = a + b + c$, demuestra que: $1 + \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{2p(p-a)}{bc}$

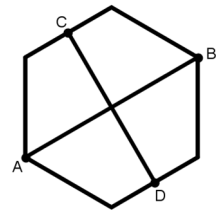
4. Si $X = 1^2 + 2^2 + \dots + 2005^2$ e $Y = 1 \cdot 3 + 2 \cdot 4 + 3 \cdot 5 + \dots + 2004 \cdot 2006$ entonces $X - Y$ vale

5. La figura representa cuatro semicírculos de radio 1cm. Los centros de los semicírculos son los puntos medios de los lados del cuadrado. ¿Cuál es el radio del círculo tangente a los cuatro semicírculos?



6. ¿Cuál es el primer dígito después de la coma del número obtenido como resultado de la multiplicación entre 10^{2008} y $3,141582403$?

7. El segmento AB conecta dos vértices opuestos de un hexágono regular. El segmento CD conecta los puntos medios de dos lados opuestos. Halla el producto de las longitudes de AB y CD si el área del hexágono es 60 cm^2 .



8. La edad promedio de los miembros de la familia Quintos es de 18 años. Si sabemos que el papá tiene 38 años y que el promedio de las edades de los miembros de la familia sin contarlo a él es de 14 años, ¿cuántos miembros tiene la familia Quintos?

9. Para dos números x e y se cumple que:

$$\begin{aligned} (x + y)^2 &= 144 \\ x^3 + y^3 &= 756 \end{aligned}$$

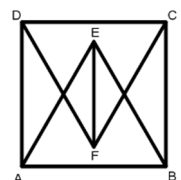
El valor de $x \cdot y$ es:

10. Se han vendido todas las entradas de la primera fila de un cine. Los asientos están numerados consecutivamente, empezando en el 1. Por error se vende una entrada duplicada de esa fila. La suma de los números de los asientos en todas las entradas vendidas en dicha fila es 857. ¿Cuál es el número de asiento del que se han vendida las dos entradas?

11. Simplificar:

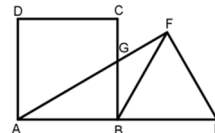
$$\frac{\left[\left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \right)^2 + \left(\frac{x}{y} - \frac{y}{x} \right)^2 \right]^2 - 4 \left[\left(\frac{x}{y} \right)^2 - \left(\frac{y}{x} \right)^2 \right]^2}{\left[\left(\frac{x}{y} \right)^3 + \left(\frac{y}{x} \right)^3 \right]^2 - \left[\left(\frac{x}{y} \right)^3 - \left(\frac{y}{x} \right)^3 \right]^2}$$

12. En la figura, ABCD es un cuadrado y los triángulos ABE y DFC son equiláteros. Si $AB = 1$, ¿cuál es la longitud de EF?

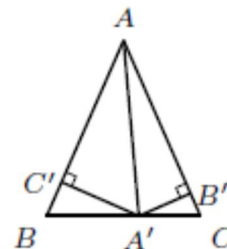


13. Si el valor numérico de $A = (2 + 1)(2^2 + 1)(2^4 + 1)(2^8 + 1)(2^{16} + 1)(2^{32} + 1)(2^{64} + 1) + 1$ equivale a 2^x , Halla el valor de x .

14. En la figura, el cuadrado ABCD y el triángulo equilátero BEF tiene lado 1, si A, B y E son colineales, entonces el área del triángulo BFG es

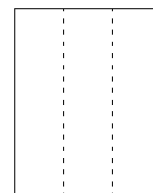


15. En la figura ABC es un triángulo isósceles de área 1, $AC = 2$ y A' es cualquier punto sobre BC. Calcula $B'A' + A'C'$.



16. Determina la solución de la ecuación $\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2+x}}$

17. Se recorta un cuadrado en 3 rectángulos a lo largo de dos segmentos paralelos a uno de los lados, tal como se muestra en la figura. Si el perímetro de cada uno de los 3 rectángulos es 24, calcula el área del cuadrado original



18. Sobre una línea recta se consideran los puntos consecutivos **A, B, C** y **D**. Se sabe que $AB = 30$ y $CD = 10$, además se toman los puntos medios de **AB** y **CD**, que son **P** y **Q** respectivamente. Hallar la longitud del segmento que tiene por extremos los puntos medios de **PC** y **BQ**.

19. Si $C(\alpha) = 90^\circ - \alpha$ y $S(\beta) = 180^\circ - \beta$, entonces al reducir $\csc \frac{\alpha}{4} \csc \frac{\alpha}{4} \csc \frac{\alpha}{4} \csc \frac{\alpha}{4} \csc \frac{\beta}{4} \csc \frac{\beta}{4} \csc \frac{\beta}{4} \csc \frac{\beta}{4}$, se obtiene 2016 veces

20. Observa la siguiente situación. Explica porque se produjo este error.

$$\begin{aligned}
 -6 &= -6 \\
 4 - 10 &= 9 - 15 \\
 4 - 10 + \frac{25}{4} &= 9 - 15 + \frac{25}{4} \\
 \left(2 - \frac{5}{2}\right)^2 &= \left(3 - \frac{5}{2}\right)^2 \\
 \sqrt{\left(2 - \frac{5}{2}\right)^2} &= \sqrt{\left(3 - \frac{5}{2}\right)^2}
 \end{aligned}$$

21. Las siguientes bandejas, están ordenadas de manera creciente, según sus pesos.



Bandeja I



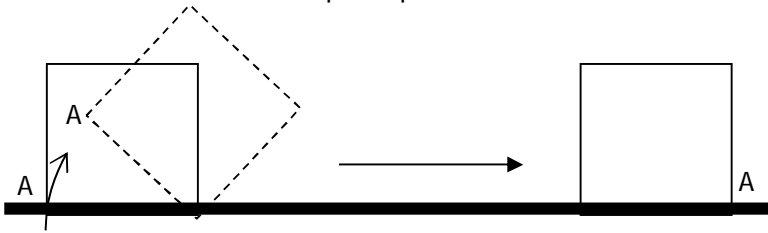
Bandeja II



Bandeja III

Si se desea ubicar una cuarta bandeja, que tiene un círculo, un triángulo y un cuadrilátero, idénticos a los anteriores, para mantener el orden, ¿Dónde hay que ubicarla?

22. La figura se tiene un cuadrado de lado 2 cm que rueda (sin resbalar) hasta que el vértice A vuelve a tocar el piso. ¿Cuál es la distancia recorrida por el punto A?



23. Alexis tiene dinero para comprar 2017 pelotas, sólo de los colores azul y rojo. La compra la realiza alternando los colores de la siguiente manera: primero compra una azul, luego dos rojas, luego tres azules, y así sucesivamente hasta que totalice 2017 pelotas, aunque tuviera que romper la secuencia numérica en la última compra. ¿Cuál es la diferencia entre el número de pelotas rojas y azules que tiene Alexis, luego de comprar las 2017 pelotas?

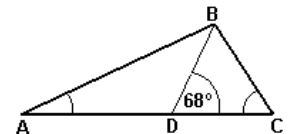
24. ¿Cuántas cifras tiene el producto $2^{2007} \cdot 5^{2006}$?

- A) 2005 B) 2006 C) 2007 D) 2008 E) 2009

25. Si se escribe $\frac{1}{7}$ en forma decimal, ¿qué cifra ocupa el lugar 2000 detrás de la coma?

- A) 1 B) 4 C) 2 D) 8 E) 5

26. En el triángulo ABC la bisectriz del ángulo B corta al lado AC en el punto D. Siendo el $\angle BDC = 68^\circ$, ¿cuánto vale la diferencia $\angle ACB - \angle BAC$?



- A) 44° B) 120° C) 24° D) 30° E) Imposible determinarlo

27. Si $(x - x^{-1}) = \sqrt{10}$, entonces el valor de $x^2 + x^{-2}$ es ...

- A) 10 B) 12 C) 11 D) 8 E) 9

28. A las 8 horas y 10 minutos, el menor de los ángulos que forman los punteros del reloj, es:

- A) 165° B) 170° C) $172,5^\circ$ D) 175° E) 180°

29. Los 3 lados de un triángulo son 18 m, 16 m y 9 m. Determina la longitud x que se debe quitar a cada lado, de modo que el nuevo triángulo sea rectángulo.

- A) 13 m B) 10 m C) 9 m D) 1 m E) 0,5 m

30. Una persona tiene $\$(a - b)$. Si al pagar una deuda se da cuenta que la razón entre el dinero que tenía y lo que le queda es $a : b$, ¿cuál de las expresiones siguientes representa el dinero que pagó por la deuda?

- A) $\frac{a-b}{a}$ B) $\frac{a-b}{b}$ C) $\frac{b(a-b)}{a}$ D) $\frac{(a-b)^2}{a}$ E) $\frac{a^2 - b^2}{a}$

31. ¿Cuál es la mayor potencia de 2 que divide a $255^2 - 1$?

- A) 2^1 B) 2^8 C) 2^9 D) 2^{127} E) 2^{254}

32. Hace 7 años, la edad de A era múltiplo de 8, y dentro de ocho años, su edad será múltiplo de 7. Hace 8 años, la edad de B era múltiplo de 7, y dentro de 7 años su edad será múltiplo de 8. Ninguno de ellos es centenario. ¿Cuál de las siguientes proposiciones es cierta:

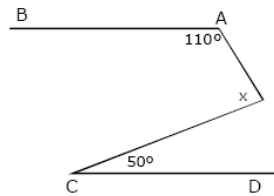
- A) **B** es dos años mayor que **A**
 B) **B** es un año mayor que **A**
 C) **A** y **B** tienen la misma edad
 D) **B** es un año más joven que **A**
 E) **B** es dos años más joven que **A**

33. Si $x = 197^2 + 2 \cdot 197 \cdot 3 + 3^2$, $y = 200^2 - 2^2$ y $z = 199 \cdot 201$, ¿cuál de las siguientes opciones es verdadera?

- A) $y < x < z$ B) $y < z < x$ C) $x < y < z$ D) $x < z < y$ E) $z = y < x$

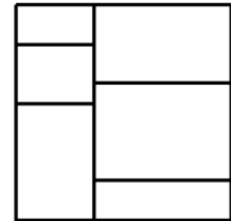
34. En la figura, $AB \parallel CD$, luego $\angle X =$

- A) 120°
 B) 100°
 C) 70°
 D) 50°
 E) 20°



35. Un cuadrado se corta en seis trozos rectangulares, como se ve en la figura. Cuando se suman los perímetros de las seis piezas el resultado es 120 cm. ¿Cuál es el área del cuadrado?

- A) 48 cm^2
 B) 64 cm^2
 C) $110,25 \text{ cm}^2$
 D) 144 cm^2
 E) 256 cm^2



36. ¿Cuántos números de dos cifras son tales que su cuadrado y su cubo terminan en la misma cifra?

- A) 1 B) 9 C) 10 D) 21 E) más de 30.

37. Rosa, en todos sus cumpleaños, recibe de un admirador tantas flores como años cumple. Su madre las seca y las guarda. Si ya tiene 120 flores guardadas, ¿cuántos años cumplió Rosa en su último cumpleaños?

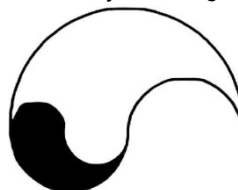
- A) 15 B) 12 C) 14 D) 10 E) 20

38. Un padre tiene x años de edad y su hijo y . ¿Dentro de cuántos años el padre tendrá el doble de la edad del hijo?

- A) $x + 2y$ B) $x - y$ C) $x - 2y$ D) $x + \frac{y}{2}$ E) $x - \frac{y}{2}$

39. La figura está formada por semicírculos de radios 2 cm, 4 cm y 8 cm. ¿Qué fracción de la figura tiene color negro?

- A) $\frac{1}{3}$ B) $\frac{1}{4}$ C) $\frac{1}{5}$
 D) $\frac{3}{4}$ E) $\frac{2}{3}$



40. Al sumar los números 4^{15} y 8^{10} , se obtiene:

- A) 2^{10} B) 2^{15} C) 2^{20} D) 2^{30} E) 2^{31}

41. Los enteros m y n verifican $(6 - m)(6 + n) = 12$. ¿Cuántos valores puede tomar m ?

- A) 6 B) 7 C) 12 D) 13 E) Ninguno de los anteriores

42. Voy a caminar durante 4 horas, deteniéndome 20 minutos después de cada hora caminando. ¿Si salgo a mediodía, a qué hora llegaré?

- A) 17h 20 min B) 17h C) 16h 20min D) 17h 40min E) 18h

43. José encontró el valor de 3^{19} , que es 1.1a2.261.467, pero lamentablemente la tercera cifra olvidó, ¿cuál es el valor de a ?

- A) 1 B) 3 C) 4 D) 6 E) 7

44. Un número x satisface la condición $\frac{1}{1 + \frac{1}{x}} = 2$. ¿Cuál es el valor de la expresión $\frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{x}}}$?

- A) $\frac{3}{2}$ B) $\frac{1}{3}$ C) $\frac{2}{3}$ D) 4 E) $\frac{1}{2}$

45. Si $a^b = \frac{1}{2}$, ¿Cuánto vale a^{-3b} ?

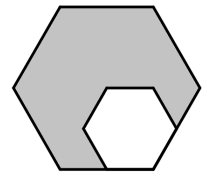
- A) $\frac{1}{8}$ B) 8 C) -8 D) 6 E) $\frac{1}{6}$

46. ¿Cuántos polígonos regulares tienen por medida de un ángulo interior un número entero de grados?

- A) 16 B) 18 C) 22 D) 24 E) infinitos

47. Los lados del hexágono regular grande de la figura son el doble de los lados del hexágono regular pequeño. El área del hexágono pequeño es 4 cm^2 . ¿Cuál es el área del hexágono grande?

- A) 16 cm^2
B) 14 cm^2
C) 12 cm^2
D) 10 cm^2
E) 8 cm^2



48. La edad promedio de la abuela, el abuelo y los siete nietos es 28 años. La edad promedio de los siete nietos es 15 años. Si se sabe que el abuelo es tres años mayor que la abuela, la edad del abuelo es:

- A) 71 B) 72 C) 73 D) 74 E) 75

49. Si $A - B - C = 2$ y $AB + AC = BC$, entonces $A^2 + B^2 + C^2 =$

- A) 2 B) 4 C) 8 D) 16 E) Ninguna de las anteriores

50. Simplifica: $\left(\left(\frac{2}{4}\right)^{-1}\right)^2 \cdot \left(\frac{8}{2}\right)^3 + \left(\sqrt[3]{4\sqrt{4}}\right)^2$

- A) 68 B) 256 C) 512 D) 260 E) 288

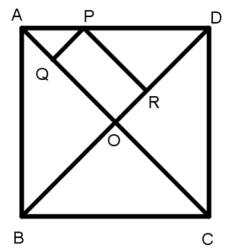
51. ¿Cuáles el orden correcto de los números: 10^8 , 5^{12} y 2^{24} .

- A) $2^{24} < 10^8 < 5^{12}$ B) $5^{12} < 2^{24} < 10^8$ C) $2^{24} < 5^{12} < 10^8$
 D) $10^8 < 5^{12} < 2^{24}$ E) $10^8 < 2^{24} < 5^{12}$

52. Jorge cortó un cuadrado de papel que tenía 20 cm de perímetro y obtuvo dos rectángulos. Si el perímetro de uno de los rectángulos recortados es 16 cm, ¿cuál es el perímetro del otro?

- A) 8 cm B) 9 cm C) 12 cm D) 14 cm E) 16 cm

53. En la figura ABCD es un cuadrado con $AB = 1$. ¿Cuál es el perímetro del rectángulo PQOR?



- A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ C) $\sqrt{2}$ D) 1
 E) No se puede determinar

54. Cuatro paquetes se pesan por parejas en todas las posibles combinaciones. Los pesos obtenidos son 5 kg, 6 kg, 8 kg, 9 kg, 11 kg y 12 kg. El peso total de los 4 paquetes es:

- A) 12 kg B) 17 kg C) 28 kg D) 34 kg E) 51 kg

55. Un cierto cultivo de bacterias, diariamente duplica su peso en gramos respecto al día anterior. Si al cabo de k días su peso es de m gramos, ¿cuántos gramos pesaba 3 días antes?

- A) $\frac{m}{3}$ B) $\frac{m(k-3)}{k}$ C) $\frac{m}{8}$ D) $\frac{km}{8}$ E) Ninguna de las anteriores

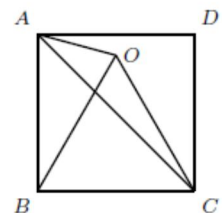
56. ¿Cuántos números de tres dígitos son tales que la suma de sus dígitos es par?

- A) 100 B) 200 C) 450 D) 500 E) 600

57. Un virus atacó el disco duro de una computadora, el primer día destruyó dos terceras partes, el segundo día, de lo que quedó destruyó una cuarta parte, finalmente el tercer día destruyó la quinta parte lo que quedaba. ¿Qué fracción del disco duro quedó sin dañar?

- A) $\frac{1}{30}$ B) $\frac{13}{60}$ C) $\frac{7}{60}$ D) $\frac{3}{5}$ E) $\frac{1}{5}$

58. En la figura ABCD es un cuadrado y OBC es un triángulo equilátero. ¿Cuánto mide el ángulo OAC?



- A) 18°
 B) 20°
 C) 25°
 D) 30°
 E) 33°

59. En un sistema de coordenadas cartesianas dibujamos un cuadrado. Una de sus diagonales está sobre el eje X. Las coordenadas de los dos vértices que están en el eje X son $(-1, 0)$ y $(5, 0)$. ¿Cuál de las siguientes son las coordenadas de otro vértice del cuadrado?

- A) $(2, 0)$ B) $(2, 3)$ C) $(2, -6)$ D) $(3, 5)$ E) $(3, -1)$

60. Cada uno de los lados de los tres cuadrados de la figura tienen longitud 1. ¿Cuál es el área de la región gris?



- A) $\frac{3}{4}$ B) $\frac{7}{8}$ C) 1 D) $\frac{5}{4}$ E) $\frac{3}{2}$

61. Al dividir un número natural X por 8 se obtiene resto 6 y al dividir otro natural Y por 8 se obtiene resto 1. ¿Cuál es el resto que se obtiene al dividir en entero $X - Y$ por 4?

- A) 5 B) 3 C) 8 D) 2 E) 1

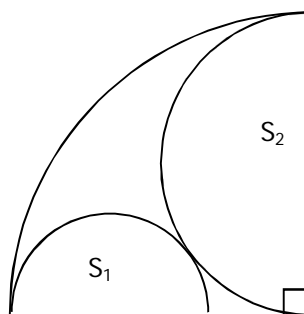
62. La suma de los dígitos del número que resulta de la siguiente operación:

$$777.777.777.777.777^2 - 222.222.222.222.223^2$$

- A) 148 B) 84 C) 74 D) 69 E) 79

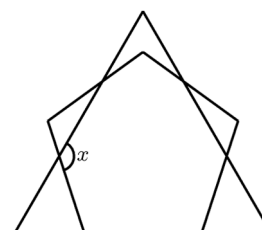
63. En la figura se tiene un cuarto de círculo y dentro de él, dos semicírculos tangentes entre sí, de áreas S_1 y S_2 . El valor de $\frac{S_1}{S_2}$ es

- A) $\frac{1}{2}$
 B) $\frac{2}{3}$
 C) $\frac{3}{4}$
 D) $\frac{4}{9}$
 E) $\frac{1}{4}$



64. En la figura se muestra un triángulo equilátero y un pentágono regular. ¿Cuánto mide el ángulo x ?

- A) 124°
 B) 128°
 C) 132°
 D) 136°
 E) 140°



65. Al factorizar la expresión $x^2 - y^2 - z^2 + 2yz + x + y - z$, uno de los factores corresponde a:

- A) $-x + y + z$
 B) $x - y - z - 1$
 C) $x + y - z + 1$
 D) $x - y + z + 1$
 E) $x - y - z$

66. El valor de $2016^3 - 2016$ es igual al producto

- A) $2014 \cdot 2015 \cdot 2016$
 B) $2015 \cdot 2016 \cdot 2017$
 C) $2016 \cdot 2017 \cdot 2018$
 D) $2017 \cdot 2018 \cdot 2019$
 E) $2018 \cdot 2019 \cdot 2020$

$$67. \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -3 \\ 1 & -1 \\ 3 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 4 & -5 \\ 1 & -1 \\ 5 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 6 & -7 \\ 1 & -1 \\ 7 & -8 \end{pmatrix} \cdot K \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 48 & -49 \\ 1 & -1 \\ 49 & -50 \end{pmatrix} =$$

- A) -50 B) 0,04 C) 1 D) 25 E) Otro valor

68. El área del cuadrado de la figura 1 es **a**, y el área del círculo inscrito en él es **b**.
¿Cuánto vale el área encerrada por la línea gruesa en la figura de la derecha?

- A) 3b
B) 2a + b
C) a + 2b
D) 3a
E) a + b

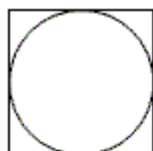


Figura 1

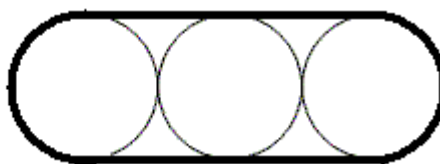
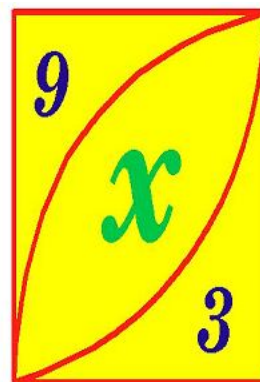
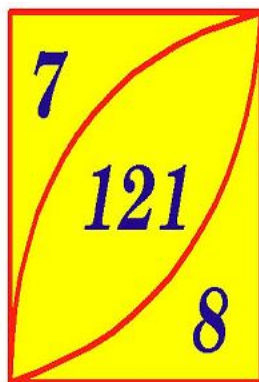


Figura 2

69. ¿Qué número corresponde a X?



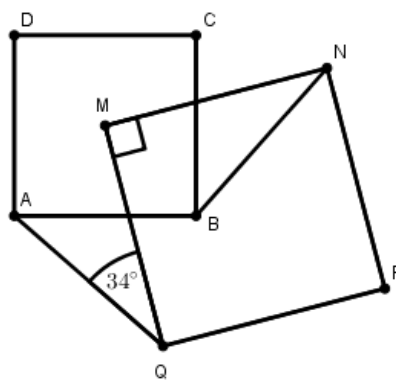
- A) 144 B) 100 C) 88 D) 81 E) 64

70. Si $a^2 = a + 2$, entonces a^3 es igual a

- A) a + 4 B) 2a + 8 C) 3a + 2 D) 4a + 8 E) 27a + 8

71. En la figura, ABCD y MNPQ son cuadrados, donde M es el centro del cuadrado ABCD. Si el ángulo MQA es igual a 34° , entonces la medida del ángulo BNP es igual a

- A) 30°
B) 34°
C) 45°
D) 56°
E) N/A



72. En el colegio "Pitágoras" a cada estudiante se le asigna un código el cual consiste de dos letras y cuatro números. Al momento de realizar la matrícula, la secretaria del colegio le ha preguntado a Alex por su código pero este no lo recuerda. Sin embargo, Alex recuerda que la parte numérica está compuesta por los números 2, 3, 5 y 7, aunque no recuerda en qué orden, y recuerda que las letras que componen su código son dos letras distintas que se encuentran en su nombre. ¿Cuántos posibles códigos tendrá que verificar la secretaria del colegio para determinar cuál de todos ellos es el de Alex?

- A) 8 B) 144 C) 210 D) 288 E) Infinitos