XIX JUEGOS MATEMÁTICOS INTER-REGIONALES
2018

ORGANIZA:

Área de Matemática del Colegio San Mateo Osorno

COLABORAN:

Colegio Alemán de Temuco
Colegio Windsor School de Valdivia
Colegio San Francisco Javier de Puerto Montt
Colegio Cahuala de Castro
Liceo San Felipe Benicio de Coyhaique

INTRODUCCIÓN

Los Juegos Matemáticos es un certamen de resolución de ejercicios y problemas dirigido a los/as estudiantes con habilidades en Matemática de Séptimo Básico a Cuarto Medio.

La competencia se realizará por equipos, para lo cual cada Establecimiento podrá presentar 2 EQUIPOS por SERIE, en caso que el Establecimiento tenga Enseñanza Básica y Media. En Caso que el Establecimiento tenga sólo Enseñanza Básica o sólo Enseñanza Media, podrá presentar 3 EQUIPOS por SERIE, entre las series de 7º - 8º Básico, 1º- 2º Medio y 3º - 4º Medio.

Se pretende con esto que los/as estudiantes se interesen y motiven por aprender más, a través de la investigación individual y grupal. Que exista el diálogo y la discusión entre los/as jóvenes matemáticos/as sobre conceptos, propiedades y formas de resolución de diversos problemas por su propia iniciativa y puedan desarrollar al máximo todas sus potencialidades.

En el presente año 2018 los establecimientos colaboradores y sedes para rendir pruebas son: Colegio Alemán de Temuco, Colegio Windsor School de Valdivia, Colegio San Francisco Javier de Puerto Montt, Colegio Cahuala de Castro y Liceo San Felipe Benicio de Coyhaique.

A continuación daremos un listado de ejercicios para practicar que han sido preguntados en pruebas de años anteriores:

SERIE 3° - 4° MEDIO

1. Una cuadrilla de pintores, que de lejos parecía una junta de médicos, tenía que pintar dos paredes, una de doble superficie que la otra. Toda la cuadrilla estuvo pintando en la pared grande durante medio día. Por la tarde la mitad de la cuadrilla pintó en la pared pequeña y la otra mitad en la grande. Al finalizar el día sólo les quedó un poco por pintar en la pared pequeña, para lo cual fue necesario que pintara un solo pintor el día siguiente completo.
¿Cuántas personas componían la cuadrilla?

NOTA: la jornada laboral está compuesta por 4 horas antes del mediodía y 4 horas por la tarde. Todos los pintores rinden el mismo trabajo y de forma uniforme.

2. El reloj de mi abuela adelanta un minuto por hora, y el de mi abuelo se atrasa medio minuto por hora. Cuando salgo de su casa, sincronizo los dos relojes y les digo que volveré cuando la diferencia entre los tiempos que marcan sus relojes sea exactamente una hora. ¿Cuánto tiempo tardaré en volver?

3. Escribe la forma más simple del número expresado por la suma:

$$\sqrt{7+4\sqrt{3}}+\sqrt{7-4\sqrt{3}}$$

4. Si se define una función como $f(x – 1) = x^2 + 3x – 18$, determina el(los) valor(es) de "x" tal que $f(x + 1) = 22$.

5. En una circunferencia de radio "r" se da una cuerda AB = c y se traza la cuerda BC perpendicular al diámetro que pasa por A. Calcular BC en función de "r" y "c".

6. Si la fracción $\dfrac{2x+5}{-3}$ pertenece al intervalo $[5,8[$, entonces ¿cuál es el intervalo al cual pertenece la fracción $\dfrac{x+1}{x+2}$?

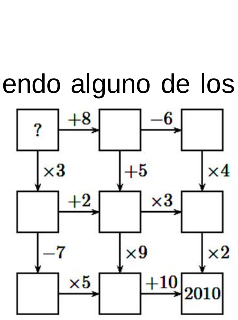
7. Tres trenes parten del mismo punto y siguen igual vía en la misma dirección y sentido, el primero parte a las 6:00 hrs, el segundo a las 7:00 hrs y el tercero a las 9:00 hrs, siendo sus velocidades de 25 , 30 y 40 km/h , respectivamente. ¿A qué hora el tercer tren estará en el punto medio de la distancia que separa al primero y al segundo?

8. ¿Cuál es el valor de la expresión

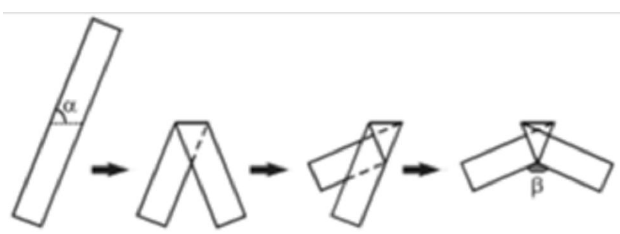
$$\frac{(2+3)(2^2+3^2)(2^4+3^4)\cdots(2^{1024}+3^{1024})(2^{2048}+3^{2048}) \; + \; 2^{4096}}{3^{2048}} \; ?$$

9. El único niño presente en una reunión notó que cada señor estrechó la mano con cada uno de los otros señores, y cada señora le dio un abrazo a cada una de las otras señoras presente. El niño contó 15 apretones de mano y 21 abrazos. ¿Cuántas personas asistieron a la reunión?

10. Juan escribió un número entero en la caja con el signo de interrogación. Luego, siguiendo alguno de los posibles caminos indicados por las flechas y efectuando las operaciones indicadas a medida que avanzaba, llegó a la caja inferior derecha con el número 2010. ¿Qué número escribió Juan inicialmente?



11. Una cinta de papel se dobla tres veces como muestra la figura. Sabiendo que α = 70º, hallar la medida del ángulo β.



12.Un papel de forma cuadra de 20 cm de lado tiene una cara de color gris y la otra de color blanco. Se divide cada lado en cuatro partes iguales y se doblen las puntas del cuadrado por los segmentos punteados que se indican en la figura 1, con lo que se obtiene la situación de la figura 2. Calcular la superficie del cuadrado gris de la figura 2.

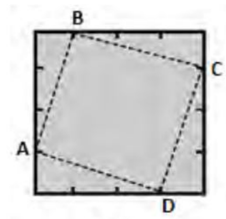


Figura 1

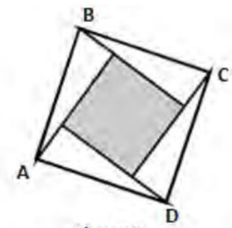
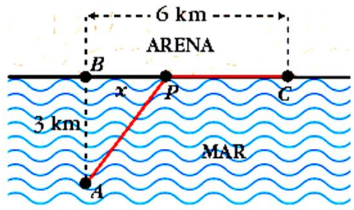


Figura 2

13.Para ir de A hasta C hemos navegado a 4 km/h en línea recta hasta P, y hemos caminado a 5 km/h de P a C. Hemos tardado, en total, 99 minutos. ¿Cuál es la distancia, x, de B a P?



14.Demuestra que la razón entre las superficies de los cubos inscritos y circunscritos a una esfera de radio “a” es 1 : 3 y que la razón entre sus volúmenes es $\sqrt{3}:9$

15. Si $x + y = a$, y además $xy = b$, encontrar el valor de $x^6 + y^6$.

16.Cada número desde el 8 hasta el 2016 se divide por 7 y se suman todos los restos obtenidos. ¿Qué número se obtiene?

17.Si a y b son números reales tales que:

$$a^4 + a^2b^2 + b^4 = 900$$

$$a^2 + ab + b^2 = 45$$

Calcula el valor de $(2a - 2b)^2$

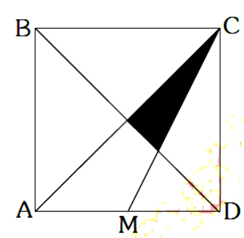
18.Para cada entero positivo n se define $f(n)$ como el cuadrado de la suma de las cifras de n. Encuentra $f(f(f(f...(f(2)))))$, donde f se aplica 2016 veces.

19.Demostrar que $\dfrac{1}{\sqrt[3]{1}+\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}} + \dfrac{1}{\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{9}} + \dfrac{1}{\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{12}+\sqrt[3]{16}}$ es igual a $\sqrt[3]{4} - 1$.

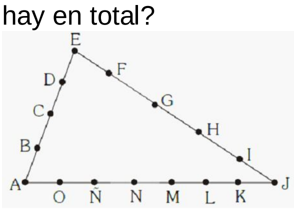
20.En el triángulo ABC, los puntos D y M se encuentran sobre los lados AC y BC, respectivamente. Se sabe que AB = BD, ∢DBC = 48° y ∢ABD = ∢MAC = ∢BCA.
Halla la medida del menor ángulo que forman las rectas AM y BD.

21.Si $m = \dfrac{1}{a - b}$; $n = \dfrac{1}{a + b}$ calcular el valor de $\left(\dfrac{m^2 + n^2}{m^2 - n^2}\right) \cdot \left(\dfrac{ab}{a^2 + b^2}\right)$ = ?

22.Si ABCD es un cuadrado de 6 m de lado y además "M" es punto medio, calcular el área de la región sombreada.



23.En un triángulo, se marcan los puntos A, B, C, D,..., O, como se muestra en la figura, ¿cuántos segmentos hay en total?



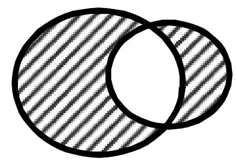
24. La suma de las raíces del conjunto de ecuaciones dado por la igualdad $\left|\left|1-|x|\right|-5\right| = 6-\frac{x^2}{3}$ es:

A) 6 B) 4 C) 2 D) 0 E) otro valor

25. La suma de las cifras del número $10^{101}-9$ es igual a

A) 891 B) 901 C) 991 D) 1001 E) 10001

26. Dos círculos de radios 4 y 6 se cortan como se ve en la figura. La diferencia de las áreas de las partes que no se superponen es



A) 2π B) 4π C) 10π

D) 20π E) faltan datos

27. Para cada número de dos cifras, la cifra de las unidades se resta de la cifra de las decenas. ¿Cuál es la suma de todos los resultados?

A) 90 B) 100 C) 55 D) 45 E) 30

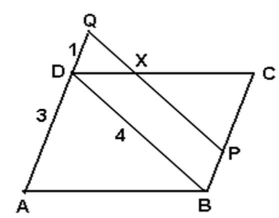
28. En un lejano planeta un año tiene 3 meses y cada mes diez días. Javier tiene 360 días de edad en la Tierra. ¿Cuántos años tendría en ese planeta?

A) 4 B) 6 C)10 D) 12 E) otra respuesta

29. Sean a, b, c números reales positivos tales que $ab=c$, $bc=12$, $b=3c$. Entonces el producto abc es igual a:

A) 4 B) 36 C) 6 D) 12 E) 24

30. En la figura ABCD y BPQD son paralelogramos. AD = 3, DQ = 1 y BD = 4. Entonces la longitud de PX es



A) Depende de lo que mida AB

B) 3 C) $\frac{8}{3}$ D) 2,7

E) No puede calcularse con estos datos

31. Como la luz viaja a velocidad finita (pero muy grande), vemos la luna como era hace 1 segundo y el Sol como era hace 8 minutos y medio. ¿Cuántas veces más lejos de la Tierra está el Sol que la Luna?

A) 10 B) 60 C) 510 D) 3000 E) 300000

32. Andrés, Benito, Celestino y Darío han obtenido los cuatro primeros puestos en el torneo de esgrima. Si sumas los números de los puestos de Andrés, Benito y Darío obtienes el número 6. Lo mismo ocurre si sumas los números de los puestos de Benito y Celestino, también obtienes 6. ¿Quién ganó el primer puesto, si Benito está por delante de Andrés?

A) Andrés B) Benito C) Celestino D) Darío E) Imposible saberlo

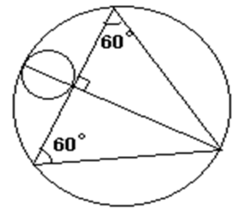
33. Una esfera tiene en ella inscrito un cubo (los vértices del cubo están en la superficie de la esfera). Estimar el porcentaje del volumen de la esfera que representa el volumen del cubo.

A) 12 % B) 37 % C) 65 % D) 80 % E) 94 %

34. Una nave espacial viaja de la Tierra al planeta X, que está a 2^{20} km de la Tierra. Cuando ha recorrido exactamente un cuarto del viaje, pierde contacto por radio con la Tierra. Lo recupera de nuevo en el momento en que está a 2^{19} km de la Tierra. ¿Cuántos km viajó la nave espacial sin contacto por radio con la Tierra?

A) 2^8 km B) 2^9 km C) 2^{10} km D) 2^{18} km E) 2^{19} km

35. En la figura, el triángulo es equilátero. Para obtener el área del círculo grande, hay que multiplicar la del pequeño por :



A) 12 B) 16
C) $9\sqrt{3}$ D π^2 E) 10

36. Supongamos que **$s_n = 1 - 2 + 3 - 4 + 5 - ... + (-1)^{n-1}\, n$**, siendo n un entero positivo. Entonces $s_{1999} + s_{2000}$ es:

A) negativo B) 0 C) 1 D) 2 E) 20

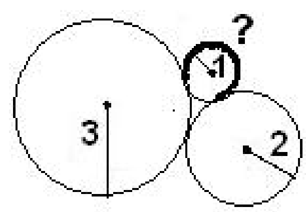
37. Se consideran tres números primos *a, b, c* tales que $a > b > c > 0$.
Si $a+b+c=78$ y $a-b-c=40$ entonces $abc=$

A) 438 B) 590 C) 1062 D) 1239 E) 2006

38. Se llama factorial de "n" al producto $n! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot (n-1)\cdot n$.
Si $n! = 2^{15}\cdot 3^{6}\cdot 5^{3}\cdot 7^{2}\cdot 11\cdot 13$, entonces $n=$

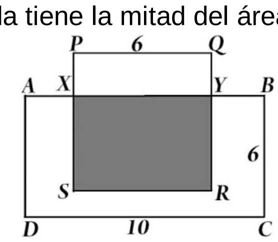
A) 13 B) 14 C) 15 D) 16 E) 17

39. En la figura se ven tres círculos de radios 1, 2 y 3 respectivamente. La longitud del arco señalado con trazo grueso es



A) $\frac{5\pi}{4}$ B) $\frac{5\pi}{3}$ C) $\frac{\pi}{2}$ D) $\frac{3\pi}{2}$ E) $\frac{2\pi}{3}$

40. En la figura *ABCD* es un rectángulo y *PQRS* es un cuadrado. La región sombreada tiene la mitad del área del rectángulo *ABCD*. ¿Cuál es la medida del segmento $\overline{PX}$?



A) 1
B) 1,5
C) 2
D) 2,5
E) 4

41. El valor del número $\left(\frac{1+2}{3}+\frac{4+5}{6}+\ldots+\frac{2002+2003}{2004}\right)+\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{668}\right)$ es:

A) 668 B) 1336 C) 2002 D) 2003 E) 2004

42. Varios extraterrestres viajan por el espacio en su cohete STAR 1. Los hay de tres colores: verde, naranja y azul. Los verdes tienen dos tentáculos; los naranja tres y los azules cinco. En la nave espacial hay tantos verdes como naranjas, y 10 azules más que verdes. En total hay 250 tentáculos. ¿Cuántos extraterrestres azules hay en la nave?

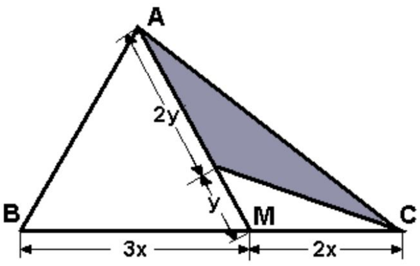
A) 15 B) 20 C) 25 D) 30 E) 40

43. El profesor piensa un número natural y les dice a los alumnos:
1) El número, o termina en 5 o es divisible por 7
2) O es mayor que 20, o termina en 9
3) O es múltiplo de 12 o es menor que 21

¿Qué número ha pensado el profesor?

A) 12 B) 25 C) 49 D) 60 E) 84

44. Si el área de ABC es 1, ¿cuánto vale el área de la parte sombreada?



A) $\frac{4}{15}$

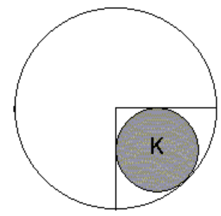
B) $\frac{2}{15}$

C) $\frac{7}{15}$

D) $\frac{4}{9}$

E) $\frac{1}{6}$

45. Un círculo K está inscrito en un cuadrante de círculo de radio 6, como se muestra en la figura. ¿Cuál es el radio de K?



A) $\frac{6-\sqrt{2}}{2}$ B) $\frac{3\sqrt{2}}{2}$

C) 2,5 D) 3

E) $6(\sqrt{2}-1)$

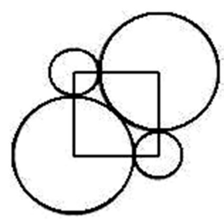
46. Si $x+y=\sqrt{5}$ y $x-y=\sqrt{3}$ entonces $\frac{x^2}{y^2}-\frac{y^2}{x^2}$ es

A) 2 B) $\sqrt{5}-\sqrt{3}$ C) $16\sqrt{15}$ D) $\sqrt{\frac{5}{3}}$ E) $\sqrt{15}$

47. ¿Cuál es la última cifra del número $1^2-2^2+3^2 \cdots -2008^2+2009^2$

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

48. Con centro en los vértices del cuadrado de la figura se han trazado círculos, dos grandes y dos pequeños. Los círculos grandes son tangentes exteriores entre sí, y ambos son tangentes exteriores a los pequeños. Si R es el radio de un círculo grande y r es el radio del círculo pequeño, entonces $\frac{R}{r}$ es igual a

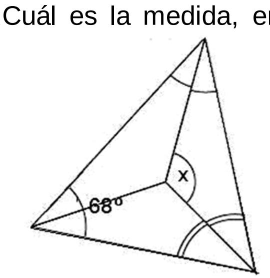


A) $\frac{2}{9}$ B) $\sqrt{5}$ C) $1+\sqrt{2}$ D) 2,5 E) $0,8\pi$

49. Una esfera tiene en ella inscrito un cubo (los vértices del cubo están en la superficie de la esfera). Estimar el porcentaje del volumen de la esfera que representa el volumen del cubo.

A) 12 % B) 37 % C) 65 % D) 80 % E) 94 %

50. Un triángulo tiene un ángulo de 68º. Se trazan las tres bisectrices interiores. ¿Cuál es la medida, en grados, del ángulo x?



A) 120º B) 124º C) 128º D)132º E) 136º

51. Los tres números $\sqrt{7}$, $\sqrt[3]{7}$, $\sqrt[6]{7}$ son términos consecutivos de una progresión geométrica. El término siguiente de esa progresión es

A) $\sqrt[5]{7}$ B) $\sqrt[12]{7}$ C) $\sqrt[10]{7}$ D) $\sqrt[9]{7}$ E) 1

52. Los lados de un triángulo tienen como medidas los enteros positivos 13, $\boldsymbol{x}$ e $\boldsymbol{y}$. Si $xy = 105$, ¿cuál es el perímetro del triángulo?

A) 35 B) 39 C) 51 D) 69 E) 119

53. Sea $f : R_{+}^{*} \to R$ tal que $2 \cdot f(x) + 3 \cdot f\left(\frac{2010}{x}\right) = 5x$.

Entonces $f(6) = K$

A) 1 B) 923 C) 993 D) 1013 E) 2009

54. ¿Para cuántos enteros "n" $(1 \leq n \leq 100)$, el número n^n es un cuadrado perfecto?

A) 55 B) 54 C) 50 D) 15 E) 5

55. En la sucesión 1, 2, 3, 0, 5, –2, 7, … se tiene $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $a_3 = 3$, y para $n \geq 4$, vale $a_n = a_{n-3} + a_{n-2} - a_{n-1}$. ¿Cuál es el 2010º término de esa sucesión?

A) –2006 B) 2008 C) –2002 D) –2004 E) un número diferente de los anteriores

56. Dos números positivos, p y q, verifican la ecuación. $p^2 - 2p + q^2 - 2q = 15 - 2pq$
Hallar el valor de p + q:

A) 1 B) 5 C) 9 D) 13 E) 17

57. Si $f(x) = px^7 + qx^3 + rx - 4$ y $f(-7) = 3$, el valor de $f(7)$ es

A) -11 B) -3 C) 10 D) 17 E) No se puede determinar

58. Si $a < b$, entonces $\sqrt{(a + \sqrt{2}b)(a - \sqrt{2}b) - b(2a - 3b)}$ es igual a:

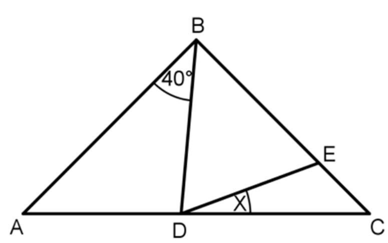
A) $a - b$ B) $a + b$ C) $-a - b$ D) $b - a$ E) $(a - b)^2$

59. Al escoger tres vértices de un cubo al azar, ¿cuál es la probabilidad de que los tres estén en una misma cara?

A) $\frac{3}{14}$ B) $\frac{2}{7}$ C) $\frac{5}{14}$ D) $\frac{3}{7}$ E) $\frac{13}{18}$

60. En la figura, AB = BC y BD = BE. Calcula la medida del ángulo x.

A) 20°
B) 30°
C) 50°
D) 40°
E) 10°



61. La ecuación en x:

$$x^2 - 6x + n^2 = 0$$

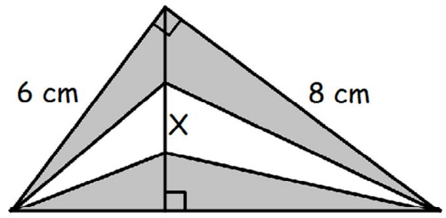
Tiene dos raíces reales a y b. Calcula el valor de la expresión E, donde

$$E = \log_n a^a + \log_n a^b + \log_n b^a + \log_n b^b$$

A) 4 B) 6 C) 12 D) 9 E) 36

62. En la siguiente figura se muestra un triángulo rectángulo cuyos catetos miden 6 cm y 8 cm. En la altura relativa a la hipotenusa se han marcado dos puntos cuya distancia es x. Si la suma de las áreas de las regiones sombreadas es 19 cm^2, calcula el valor de x.

A) 0,5 cm
B) 1 cm
C) 2 cm
D) $\sqrt{5}$ cm
E) 0,2 cm



63. En una urna hay cierta cantidad de canicas azules y una canica roja. La probabilidad de sacar dos canicas y que ambas sean azules es exactamente 50%. El número total de canicas en la suma es:

A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

64. Si : 1 + 2 + 3 + 4 +…..+ n = 990

y 3 + 6 + 9 + 1 2 + …+ 3m = 630 entonces $\sqrt{m+n} = ?$

A) 10 B) 12 C) 7 D) 8 E) 6

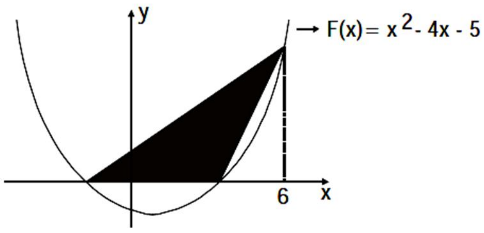
65. Si $a^6 = 2a^3 + 1$, entonces $(a^2 - 2a + 1)(a^2 + a + 1)^2 = ?$

A) 1 B) 2 C) 3 D) -1 E) -2

66. Una liebre y una tortuga parten simultáneamente de un mismo punto, la tortuga recorre en cada minuto 10 m y la liebre 100 m, si ambos se dirigen hacia un mismo punto y además la liebre llega a la meta y regresa donde la tortuga, luego va a la meta y regresa donde la tortuga y así sucesivamente, hasta que ambos llegan juntos a la meta. Si la tortuga recorrió 2 Km. ¿Cuántos kilómetros recorrió la liebre?

A) 200 B) 2 C) 20 D) 40 E) 400

67. Hallar el área de la región sombreada



A) 21 B) 42 C) 28 D) 14 E) 24

68. Dado el triángulo ABC cuyos vértices son A= (-5, -1), B= (2, 0) y C= (-2 , a). Para qué valor de "a" el triángulo será rectángulo en C?

A) -4 B) 3 C) 4 o -3 D) -4 o 3 E) -4 o -3