Pauta de Corrección

(Serie 3o y 4o Medio)

Item: Problemas de Desarrollo

1. Notemos que

$$\begin{aligned}
x &= \sqrt[3]{\sqrt{7}-\sqrt{6}}+\sqrt[3]{\sqrt{7}+\sqrt{6}}\\
x^3 &= 2\sqrt{7}+3\left(\sqrt[3]{\sqrt{7}-\sqrt{6}}+\sqrt[3]{\sqrt{7}+\sqrt{6}}\right)\\
x^3 &= 2\sqrt{7}+3x\\
x^3-3x &= 2\sqrt{7}\\
\left(x^3-3x\right)^2 &= \left(2\sqrt{7}\right)^2\\
x^6-6x^4+9x^2 &= 28
\end{aligned}$$

Por lo tanto, el valor numerico de $E(x)$ es 28.

2. Aplicando las restricciones corespondientes a cada logaritmo, obtenemos las siguientes inecuaciones:

- $7x+4>0$, de donde $x>-\frac{4}{7}$
- $2x+3>0$, de donde $x>-\frac{3}{2}$

de lo anterior, $x>-\frac{4}{7}$. Luego, resolviendo la ecuación logarítmica:

$$\begin{aligned}
\log\sqrt{7x+4}+\log\sqrt{2x+3} &= 1+\log 1,5\\
\log\sqrt{(7x+4)(2x+3)} &= \log 15\\
\log\sqrt{14x^2+29x+12} &= \log 15\\
\sqrt{14x^2+29x+12} &= 15\\
14x^2+29x+12 &= 225\\
14x^2+29x-213 &= 0\\
(14x+71)(x-3) &= 0
\end{aligned}$$

Obtenemos las soluciones $x_1=-\frac{71}{14}$ y $x_2=3$. Pero considerando que $x>-\frac{4}{7}$, nos queda la solución final $x=3$.

3. Tanto el númerador, como el denominador, corresponden a series aritméticas con 10 y 12 términos respectivamente, luego, trabajándolas por separado:

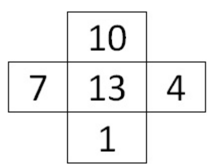
   - $\underbrace{2+6+10+\ldots+34+38}_{10 \text{ términos}} = \underbrace{(38+2)+(34+6)+\ldots+(18+22)}_{5 \text{ términos}} = 200.$

   - $\underbrace{3+9+15+21+\ldots+63+69}_{12 \text{ términos}} = \underbrace{(69+3)+(63+9)+\ldots+(33+39)}_{6 \text{ términos}} = 432$

   Por lo tanto, $S = \dfrac{200}{432} = \dfrac{25}{54}$

Item: Problemas con alternativas

1. **[Alternativa D]** Consideremos el siguiente ordenamiento (que no es el único) cuya suma es 24.



2. **[Alternativa E]** Para que todas las expresiones sean iguales, debemos notar que el número mayor es aquel al que se le resta la mayor cantidad, que en este caso es e.

3. **[Alternativa C]** Observervando la imágen, para obtener el área del ΔABC, plantearemos la siguiente ecuación

$$Area_{ABC} = Area_{P_1P_5P_3} - Area_{CBP_3} - Area_{ACP_1} - Area_{ABP_5}.$$

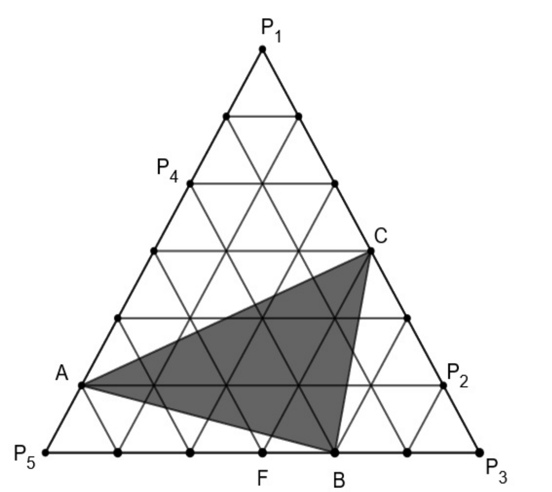
   Notemos que:

   a) $Area_{CBP_3} = \dfrac{2}{3} \cdot Area_{CFP_3} = \dfrac{2}{3} \cdot 9 = 6$

   b) $Area_{ACP_1} = \dfrac{3}{5} \cdot Area_{AP_2P_1} = \dfrac{3}{5} \cdot 25 = 15$

   c) $Area_{ABP_5} = \dfrac{1}{4} \cdot Area_{BP_4P_5} = \dfrac{1}{4} \cdot 16 = 4$

   Por lo tanto, $Area_{ABC} = 36 - 6 - 15 - 4 = 11.$



4. **[Alternativa B]** Si $x-1=-2$, entonces $x=-1$. Luego

$$\begin{aligned} f(-2) &= \frac{3(-1)-5}{(-1)+2} \\ &= \frac{-8}{1} \\ &= -8 \end{aligned}$$

5. **[Alternativa A]** Los números de la forma n^n, con $1 \leq n \leq 100$ son

$$\underbrace{1^1, 2^2, 3^3, \ldots, 100^{100}}_{100 \text{ términos}}$$

de ellos son cuadrados perfectos

   a) Todos aquellos que tienen exponente par, que son 50 términos

   b) todos aquellos de base impar, pero que son cuadrados perfectos como $1^1, 9^9, 25^{25}, 49^{49}, 81^{81}$

Por lo tanto, son 55 enteros.

6. **[Alternativa D]** Buscamos un número de 3 cífras, de la forma

$$a\left(\frac{a+b}{2}\right)b.$$

Notemos que

$$\begin{aligned} a\left(\frac{a+b}{2}\right)b &= 100a+10\left(\frac{a+b}{2}\right)+b \\ &= 100a+5a+5b+b \\ &= 105a+6b \\ &= 3(35a+2b) \end{aligned}$$

Los números que cumplen esta condición son múltiplos de 3, es decir, si $k \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} a+b+\frac{a+b}{2} &= 3k \\ 2a+2b+a+b &= 6k \\ 3a+3b &= 6k \\ a+b &= 2k \end{aligned}$$

La suma de los dígitos de las centenas y las unidades debe ser par. Estos son 5 del 100 al 199, 5 del 200 al 299 y así sucesivamente. Por lo tanto son 45 números.

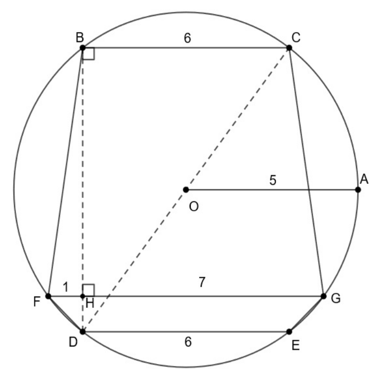
7. **[Alternativa D]** Notemos que al lanzar dos dados, los resultados de la suma de sus puntos los podemos ordenar en la siguiente tabla:

	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

Si el tercer lanzamiento tiene que ser igual a la suma de los dos anteriores, entonces solo pueden ocurrir los 15 casos señalados en la tabla. Luego, de esos 15, solo en 8 casos aparece al menos una vez un 2 (los 7 de la tabla, más el caso $(1, 1, 2)$).

Por lo tanto, la respuesta es $\frac{8}{15}$

8. **[Alternativa D]** Observemos la imágen. Notemos que el área del trapecio $FGCB$ es $7 \cdot \overline{BH}$ y el área del trapecio $DEGF$ es $7 \cdot \overline{DH}$, donde $\overline{BH} > \overline{DH}$. Luego, podemos establecer las siguientes ecuaciones:



   a) Usando el teorema de las cuerdas, obtenemos $\overline{DH} \cdot \overline{BH} = 7$

   b) Usando el teorema de pitágoras en el ΔDBC, obtenemos $\overline{DH} + \overline{BH} = 8$.

De donde $\overline{BH} = 7$ y $\overline{DH} = 1$. Por lo tanto

$$\frac{\overline{BH}}{\overline{DH}} = \frac{7}{1} = 7.$$

9. **[Alternativa D]** Sea $x \in \mathbb{Z}$. para

   a) $x = 1$, obtenemos $4^{\frac{0}{2}} = 1$

   b) $x = 3$, obtenemos $4^{\frac{2}{4}} = 2$

   c) $x = -2$, obtenemos $4^{\frac{3}{1}} = 64$

   d) $x = -3$, obtenemos $4^{\frac{4}{2}} = 16$

   e) $x = -5$, obtenemos $4^{\frac{6}{4}} = 8$

Por lo tanto, para 5 valores de x se cumple lo pedido.

10. **[Alternativa E]** Solo bastaría ver para qué cantidad x, 15 Euros corresponde al 12 %:

$$x = \frac{15}{0,12} = 125$$

Por lo tanto, para ir al hipermercado, debe gastar como mínimo 125 Euros.