Pauta de Corrección

(Serie 3o y 4o Medio)

Item: Problemas de Desarrollo

1.

$$\begin{aligned}
2+5+8+\ldots+x &= 155\\
2+[2+1(3)]+[2+2(3)]+[2+3(3)]+\ldots+[2+n(3)] &= 155\\
2(n+1)+3(1+2+\ldots+n) &= 155\\
2(n+1)+3\frac{n(n+1)}{2} &= 155\\
4n+4+3n^2+3n &= 310\\
3n^2+7n-306 &= 0
\end{aligned}$$

esta ecuación tiene dos soluciones, la positiva es $n=9$, por lo tanto

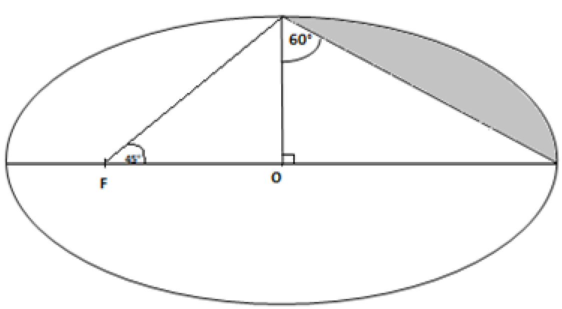
$$x = 2+3n = 29$$

2. Denotemos por N a la cantidad de alumnos/as que tiene el triángulo con f filas. Así

$$\begin{aligned}
1+2+3+4+\ldots+f &= 1.128\\
\frac{f(f+1)}{2} &= 1.128\\
f^2+f &= 2.256\\
f^2+f-2.256 &= 0\\
(f+48)(f-47) &= 0
\end{aligned}$$

de donde la solución es $f=47$, es decir, se deben formar 47 filas

3. Observemos la figura



El área de la elipse es igual a $r_1r_2\pi$, siendo r_1 y r_2 los semiejes, que equivalen a los lados del triángulo rectángulo AOB. Si la distancia focal es 6, quiere decir que la distancia entre OF es igual a 3. Como el triángulo FOA es rectángulo isósceles, OF es igual a OA.

De este valor podemos obtener el valor del segmento $AB=6$ y aplicando el teorema de pitágoras, tenemos que $OB=3\sqrt{3}$.

Por lo tanto, el área de la elipse es $9\sqrt{3}\pi$ y el área del triángulo AOB es $\frac{9\sqrt{3}}{2}$ y el área sombreada será:

$$\frac{9\sqrt{3}\pi}{4}-\frac{9\sqrt{3}}{2}=\frac{9\sqrt{3}(\pi-2)}{4}$$

Item: Problemas con alternativas

1. **(Alternativa A)** El área del cuadrado es 36. Para obtener el área sombreada, restaremos los triángulos blancos, El mayor de área 6 y el menor de área 2. Por lo tanto, el área sombreada es

$$36 - 2(6) - 2(2) = 20$$

2. **(no está la alternativa correcta)** Sean las incógnitas
x : cantidad de billetes de \$2.000
y : cantidad de billetes de \$5.000

obtenemos las siguientes ecuaciones

$$\left.\begin{array}{rcl} x + y & = & 28 \\ 2.000x + 5.000y & = & 101.000 \end{array}\right|$$

Que, al resolver el sistema, obtenemos como solución $y = 15$.

3. **(Alternativa A)** Sean las incógnitas
x : Cantidad de manzanas
$\frac{x}{N}$: Cantidad de manzanas que recibe cada uno de los N amigos.

Si fueran $N - 2$ amigos, la cantidad de manzanas $\frac{x}{N-2}$ sería $\frac{x}{N} + 1$ donde se obtiene que

$$x = N\left(\frac{N}{2} - 1\right)$$

Por otro lado, si fueran $N - 3$ amigos, la cantidad de manzanas $\frac{x}{N-3}$ sería $\frac{x}{N} + 2$ donde se obtiene que

$$x = N\left(\frac{2N}{3} - 2\right)$$

Luego

$$\begin{array}{rcl} N\left(\frac{N}{2} - 1\right) & = & N\left(\frac{2N}{3} - 2\right) \\ \frac{N}{2} - 1 & = & \frac{2N}{3} - 2 \\ 1 & = & \frac{2N}{3} - \frac{N}{2} \\ 6 & = & N \end{array}$$

4. **(Alternativa D)** El ΔABC tiene perímetro de $20cm$, por lo tanto los segmentos BC y AC miden $8cm$ cada uno.
El ΔADC es rectángulo en C, pues su hipotenusa es el diámetro de la circunferencia, por lo que podemos hacer $AC^2 + CD^2 = AD^2$ de donde se obtiene que el diámetro $AD = \sqrt{73}$.
Luego el área de la circunferencia con centro O esta dada por:

$$\pi\left(\frac{\sqrt{73}}{2}\right)^2 = 18,25\pi$$

5. **(Alternativa E)** Como cada símbolo corresponde a un dígito, tenemos las siguientes posibilidades:

- @ $= 1$, 2 ó 3 (como máximo), entonces
- $* = 3$, 6 ó 9

- $\#$ =1, 2 ó 3 (como máximo), entonces
- & =3,6 ó 9

pero $*$ y & no pueden ser 9, pues al sumar con el menor valor (3) se obtiene un resulado de dos dígitos. Por lo tanto $*+\&$ puede tener dos posibilidades $(3+6)$ ó (6+3), ambos con el mismo valor, de donde $\hat{}= 9$.

6. **(Alternativa D)** Sean
m_{BC} : la pendiente de BC
m_{AC} : la pendiente de AC
Luego, para que el triángulo ABC sea rectángulo en C, se debe cumplir que
$$m_{BC} \times m_{AC} = -1$$
de donde
$$\begin{aligned} m_{BC} \times m_{AC} &= -1 \\ -\frac{a}{4} \times \frac{a+1}{3} &= -1 \\ a^2 + a - 12 &= 0 \\ (a+4)(a-3) &= 0 \end{aligned}$$
Por lo tanto, $a = -4$ ó $a = 3$.

7. **(Alternativa A)** Supongamos $A(0,0,0)$, luego $B(-2,3,2)$. Por lo tanto, la medida del segmento AB es
$$\sqrt{(-2)^2 + (3^2) + (2)^2} = \sqrt{17}$$

8. **(Alternativa C)** Sea $a_1 = 0$ y $a_{n+1} = a_n + (-1)^n \cdot n$, para $n \in \mathbb{N}$. por simple inspección obtenemos
$$\begin{array}{lll} a_1 = & 0 & =0 \\ a_2 = & 0 + (-1)^1 \cdot 1 & =-1 \\ a_3 = & -1 + (-1)^2 \cdot 2 & =1 \\ a_4 = & 1 + (-1)^3 \cdot 3 & =-2 \\ a_5 = & -2 + (-1)^4 \cdot 4 & =2 \\ a_6 = & 2 + (-1)^5 \cdot 5 & =-3 \\ & \vdots & \end{array}$$
de donde podemos concluir que si $a_k = 2.008$, entonces k es impar y por lo tanto
$$\begin{aligned} a_{k+1} &= -2.009 \\ 2.008 + (-1)^k \cdot k &= -2.009 \\ 2.008 - k &= -2.009 \\ 4.017 &= k \end{aligned}$$

9. **(Alternativa C)** Ordenando convenientemente
$$\begin{aligned} S_{2.008} &= 1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 \ldots - 2.008 \\ &= (1-2) + (3-4) + (5-6) + \ldots + (2.007 - 2.008) \\ &= \underbrace{-1 - 1 - 1 - 1 - \ldots - 1}_{1.004 \text{ veces}} \\ &= -1.004 \end{aligned}$$
De la misma forma
$$\begin{aligned} S_{2.009} &= 1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 \ldots - 2.008 + 2.009 \\ &= -1.004 + 2.009 \\ &= 1.005 \end{aligned}$$
Por lo tanto
$$S_{2.008} + S_{2.009} = -1.004 + 1.005 = 1$$

10. **(Alternativa C)** Sea la muestra $\{x_1, x_2, \ldots, x_{2.000}\}$ tal que

$$\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_{2.000}}{2.000} = 2.000$$

de donde se obtiene que $x_1 + x_2 + \ldots + x_{2.000} = 4.000.000$. Luego tenemos

$$\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_{2.000} + y_1 + y_2 + \ldots + y_{2.010}}{4.010} = 2.010$$

reemplazando y despejando

$$\begin{aligned}
\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_{2.000} + y_1 + y_2 + \ldots + y_{2.010}}{4.010} &= 2.010 \\
\frac{4.000.000 + y_1 + y_2 + \ldots + y_{2.010}}{4.010} &= 2.010 \\
4.000.000 + y_1 + y_2 + \ldots + y_{2.010} &= 8.060.100 \\
y_1 + y_2 + \ldots + y_{2.010} &= 4.060.000 \\
\frac{y_1 + y_2 + \ldots + y_{2.010}}{2.010} &= \frac{4.060.000}{2.010} \\
\frac{y_1 + y_2 + \ldots + y_{2.010}}{2.010} &= 2019,95\ldots
\end{aligned}$$