

SERIE 2: 1° - 2° MEDIO - SOLUCIONARIO

**COMENTARIO GENERAL:** Si bien existe más de una forma de resolver cada problema, solo presentaremos una en este solucionario.

- Lee atentamente y responde justificadamente lo que se pregunta. (5 pt. c/u)

1. Tres recipientes contienen agua. Si se vierte  $\frac{1}{3}$  del contenido del primer recipiente en el segundo, y a continuación  $\frac{1}{4}$  del contenido del segundo en el tercero, y por último  $\frac{1}{10}$  del contenido del tercero en el primero, entonces cada recipiente queda con 9 litros de agua. ¿Qué cantidad de agua había originalmente en cada recipiente?

**RESPUESTA:**

Haremos el proceso a la inversa. Cada uno de los recipientes tiene 9 litros de agua, luego de que se pasara  $\frac{1}{10}$  del contenido del 3° recipiente al 1°. Es decir el recipiente 3 queda con  $\frac{9}{10}$  que son 9 litros, por lo que antes de la acción tenía 10 litros y por tanto el 1° recipiente tenía 8 litros:

Recipiente 1	Recipiente 2	Recipiente 3
8	9	10

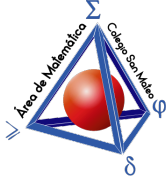
La tabla muestra como quedaron los recipientes luego de que se pasara  $\frac{1}{4}$  del contenido del 2° al 3° recipiente. Siguiendo el mismo razonamiento, en el 2° recipiente quedó  $\frac{3}{4}$  de su capacidad que equivale a 9 litros, por lo que antes de la acción tenía 12 litros y el 3° recipiente tenía 7 litros

Recipiente 1	Recipiente 2	Recipiente 3
8	12	7

Finalmente, se vierte  $\frac{1}{3}$  del contenido del primer recipiente al segundo, es decir en el primer recipiente queda  $\frac{2}{3}$  de su capacidad que equivale a 8 litros, por lo que antes de la acción tenía 12 litros y el segundo tenía 8 litros, quedando:

Recipiente 1	Recipiente 2	Recipiente 3
12	8	7

Que corresponde a la respuesta pedida.



ETAPA 1  
XXI JUEGOS MATEMÁTICOS  
INTERREGIONALES  
2022



2. Un hombre le dijo a otro: «Cuando yo tenía la edad que tú tienes hoy, nuestras edades sumaban 50 años». A lo que el otro respondió: «cuando yo tenga la edad que tú tienes hoy, nuestras edades sumarán 66 años». ¿Qué edad tenía cada uno de ellos en el momento de este diálogo?

**RESPUESTA:**

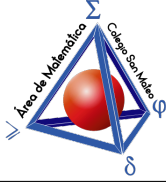
Ordenemos la información en la siguiente tabla:

Cuando el mayor tenía la edad del menor la suma de sus edades es 50	hoy	Cuando el menor tenga la edad del mayor la suma de sus edades será 66
--	-----	--

Sabemos que por cada año que pasa, la suma de las edades aumenta en 2 años, por lo que podemos deducir que entre cada situación han pasado 8 años, luego:

- a) La diferencia de sus edades es 4 años.
- b) hoy sus edades deberían sumar  $50 + 2 \cdot 4 = 58$  años.

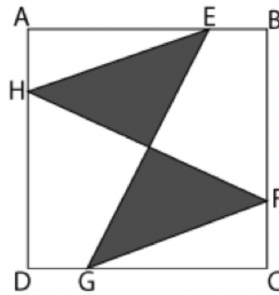
De donde se deduce que sus edades son 31 y 27 años.



ETAPA 1  
XXI JUEGOS MATEMÁTICOS  
INTERREGIONALES  
2022



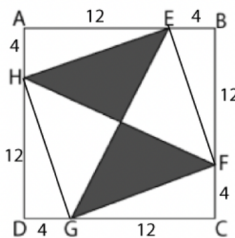
3. El cuadrado  $ABCD$  de la figura adjunta tiene área  $256 \text{ cm}^2$ . Los puntos  $E, F, G$  y  $H$  están en los lados del cuadrado de modo que  $AE = BF = CG = DH$ . Si  $AE = 3 \cdot EB$ , ¿cuál es el perímetro de la figura sombreada?



**RESPUESTA:**

En primer lugar, dado que el área de  $ABCD$  es  $256 \text{ cm}^2$  entonces los lados del cuadrado miden  $16 \text{ cm}$ , y por tanto  $AE = 12 \text{ cm}$  y  $EB = 4 \text{ cm}$  ya que  $AE = 3 \cdot EB$ . A su vez,  $BF = CG = DH = 12 \text{ cm}$  y  $EB = FC = GD = HA = 4 \text{ cm}$ .

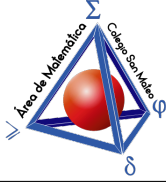
De manera auxiliar podemos trazar los segmentos  $EF$  y  $GH$  y tendríamos la siguiente figura.



Luego, los triángulos  $AHE, BFE, CGF$  y  $DHG$  son congruentes entre sí y sus hipotenusas son iguales a  $4\sqrt{10}$ , luego el cuadrilátero  $EFGH$  es un cuadrado de lado  $4\sqrt{10}$  y sus diagonales miden  $4\sqrt{10} \cdot \sqrt{2} = 4\sqrt{20}$

Finalmente el perímetro de la figura sombreada sería

$$P = 2 \cdot 4\sqrt{10} + 2 \cdot 4\sqrt{20} = 8\sqrt{10} + 8\sqrt{20} = 8(\sqrt{10} + \sqrt{20})$$



ETAPA 1  
XXI JUEGOS MATEMÁTICOS  
INTERREGIONALES  
2022



- Selección múltiple. Encierra en un círculo la letra de la alternativa correcta. Debes justificar tu respuesta. (3 pt. c/u.)

1. El promedio de 7 números enteros positivos es 49. Si se suma 1 al primer número, 2 al segundo, 3 al tercero y así sucesivamente hasta el séptimo, ¿cuál es el nuevo promedio?

**RESPUESTA:**

Al plantear la situación, tenemos:

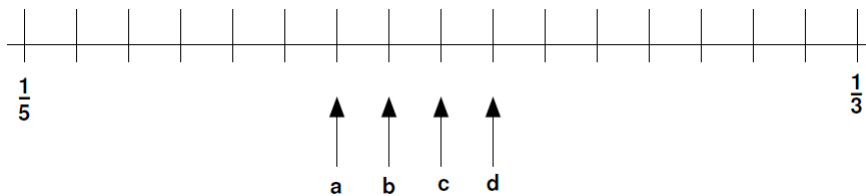
$$\frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7}{7} = 49$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 = 343$$

Luego, sumamos como nos indica:

$$\begin{aligned} \frac{x_1 + 1 + x_2 + 2 + x_3 + 3 + x_4 + 4 + x_5 + 5 + x_6 + 6 + x_7 + 7}{7} &= \\ \frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7}{7} &= \frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + 28}{7} \\ &= \frac{343 + 28}{7} \\ &= \frac{371}{7} \\ &= 53 \end{aligned}$$

2. Las fracciones  $\frac{1}{3}$  y  $\frac{1}{5}$  se colocan en la recta numérica



¿Dónde va la fracción  $\frac{1}{4}$ ?

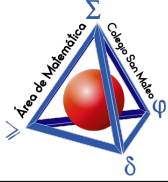
**RESPUESTA:**

Notemos que el intervalo que va desde  $\frac{1}{5}$  y  $\frac{1}{3}$  se ha dividido en 16 partes, por lo que podríamos calcular la medida de cada una de las 16 partes:

$$\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) \div 16 = \frac{2}{15} \cdot \frac{1}{16} = \frac{1}{120}$$

Luego, amplificamos para obtener el mismo denominador:  $\frac{1}{5} = \frac{24}{120}$ ,  $\frac{1}{4} = \frac{30}{120}$  y  $\frac{1}{3} = \frac{40}{120}$

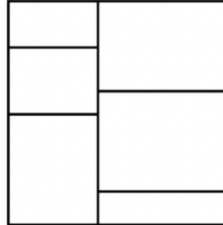
Por lo tanto, la fracción se ubica en la posición de la letra *a*.



ETAPA 1  
XXI JUEGOS MATEMÁTICOS  
INTERREGIONALES  
2022

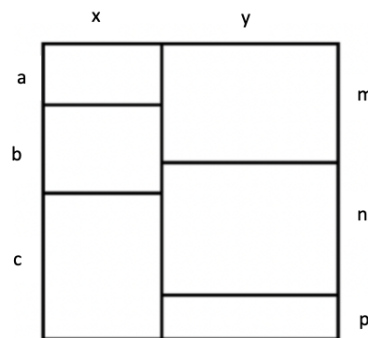


3. Un cuadrado de papel se cortó en 6 piezas rectangulares, como se muestra en la figura. Si la suma de los perímetros de todas las piezas es  $120\text{ cm}$ , ¿cuál es el área del cuadrado original?



**RESPUESTA:**

Comenzamos representando cada uno de los lados de las piezas con una letra correspondiente, quedando como la figura adjunta.



Luego es trivial verificar que  $a + b + c = x + y = m + n + p$  equivalen al lado del cuadrado que llamaremos  $l$ .

Por otra parte, la suma de los perímetros de las piezas estaría representada por ( $P$ )

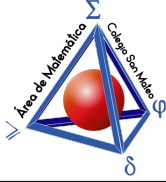
$$P = 2a + 2b + 2c + 2m + 2n + 2p + 6x + 6y$$

$$P = 2(a + b + c) + 2(m + n + p) + 6(x + y)$$

$$P = 2l + 2l + 6l$$

$$P = 10l$$

Lo que es igual a  $120$ , es decir  $10l = 120$  y por tanto  $l = 12$ . Es decir, cada lado del cuadrado mide  $12\text{ cm}$  y por lo tanto el área del cuadrado es igual a  $144\text{ cm}^2$



ETAPA 1  
XXI JUEGOS MATEMÁTICOS  
INTERREGIONALES  
2022



4. ¿Cuál es la última cifra del número  $3^{2022}$ ?

**RESPUESTA:**

En primer lugar analizamos las potencias de 3,

$$3^1 = 3$$

$$3^2 = 9$$

$$3^3 = 27$$

$$3^4 = 81$$

$$3^5 = 243$$

$$3^6 = 729$$

...

Es decir, el último dígito del valor de la potencia tiene 4 posibilidades (3, 9, 7, 1), los que dependen del exponente de la potencia de la siguiente manera:

- a) Si dividimos el exponente de la potencia por 4 y el resto da 0, entonces la última cifra del valor de la potencia será 1
- b) Si dividimos el exponente de la potencia por 4 y el resto da 1, entonces la última cifra del valor de la potencia será 3
- c) Si dividimos el exponente de la potencia por 4 y el resto da 2, entonces la última cifra del valor de la potencia será 9
- d) Si dividimos el exponente de la potencia por 4 y el resto da 3, entonces la última cifra del valor de la potencia será 7

Luego, dividimos 2022 por cuatro y da 505 con un resto de 2, por lo tanto, la última cifra del número  $3^{2022}$  es 9

5. Si  $a - b = 6$  y  $ab = -3$ , entonces el valor de  $\frac{1}{a} - \frac{1}{b}$  es igual a

**RESPUESTA:**

En primer lugar analizamos que la expresión  $\frac{1}{a} - \frac{1}{b} = \frac{b-a}{ab}$  y por otra parte si  $a - b = 6$ , entonces  $b - a = -6$ . Finalmente  $\frac{1}{a} - \frac{1}{b} = \frac{b-a}{ab} = \frac{-6}{-3} = 2$