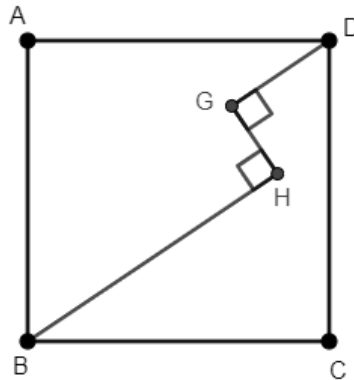


SERIE 3: 3° - 4° MEDIO - SOLUCIONARIO

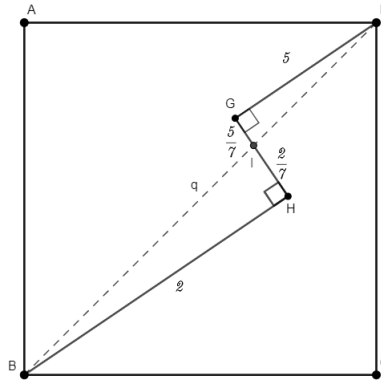
- Lee atentamente y responde justificadamente lo que se pregunta. (5 pt. c/u)

- Dentro del cuadrado $ABCD$ se traza un camino $DGHB$, formado por segmentos lineales, como se muestra en la figura. Dado que $DG = 5$, $GH = 1$ y $HB = 2$, ¿cuál es el área del pentágono $ADGHB$?



RESPUESTA:

Se traza la diagonal DB , formando dos triángulos semejantes $\triangle BHI \sim \triangle DGI$ en la razón $2 : 5$, donde el lado $GH = 1$ queda dividido en la misma razón, como muestra la figura



Aplicando Pitágoras, tenemos que:

$$DI^2 = 5^2 + \left(\frac{5}{7}\right)^2$$

$$DI^2 = 25 + \frac{25}{49}$$

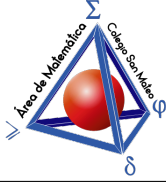
$$DI = \frac{25}{7}\sqrt{2}$$

y

$$BI^2 = 2^2 + \left(\frac{2}{7}\right)^2$$

$$BI^2 = 4 + \frac{4}{49}$$

$$BI = \frac{10}{7}\sqrt{2}$$



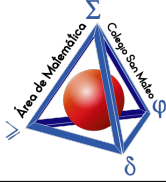
ETAPA 1
XXI JUEGOS MATEMÁTICOS
INTERREGIONALES
2022



De lo anterior, tenemos que la diagonal $DB = 5\sqrt{2}$, de donde deducimos que la medida del lado del cuadrado es 5.

Por lo tanto:

$$\begin{aligned}\text{Área } ADGHB &= \text{Área } ABD + \text{Área } BHI - \text{Área } DGI \\ &= \frac{25}{2} + \frac{2}{7} \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} - \frac{5}{7} \cdot 5 \cdot \frac{1}{2} \\ &= \frac{25}{2} + \frac{2}{7} - \frac{25}{14} \\ &= \frac{25}{2} + \frac{2}{7} - \frac{25}{14} \\ &= \frac{175}{14} + \frac{4}{14} - \frac{25}{14} \\ &= \frac{154}{14} \\ &= 11\end{aligned}$$



ETAPA 1
XXI JUEGOS MATEMÁTICOS
INTERREGIONALES
2022



2. Si f es una función tal que $f(x + 1) = f(x) + 2x + 4$ y $f(0) = 2$, entonces ¿cuál es el valor numérico de $f(1) + f(-1)$?

RESPUESTA:

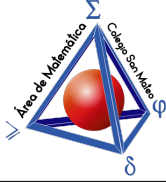
Evaluando en $x = 0$ se tiene

$$\begin{aligned}f(0 + 1) &= f(0) + 2(0) + 4 \\f(1) &= 6\end{aligned}$$

Evaluando en $x = -1$ se tiene

$$\begin{aligned}f(-1 + 1) &= f(-1) + 2(-1) + 4 \\f(0) &= f(-1) + 2 \\2 &= f(-1) + 2 \\f(-1) &= 0\end{aligned}$$

Finalmente, $f(1) + f(-1) = 6 + 0 = 6$.



ETAPA 1
XXI JUEGOS MATEMÁTICOS
INTERREGIONALES
2022



3. Un recipiente con agua contiene $\frac{1}{5}$ de lo que no contiene. Si se saca $\frac{1}{8}$ de lo que falta por llenar y luego se agrega $\frac{1}{5}$ de lo que queda, se obtiene 90 litros. ¿Cuántos litros es la cuarta parte de lo que contenía inicialmente?

RESPUESTA:

Si un recipiente con agua tiene $\frac{1}{5}$ de lo que no contiene, significa que lo que **no tiene es 5 veces lo que tiene**, por tanto, el contenido es $\frac{1}{6}c$, donde c es la capacidad total del recipiente.

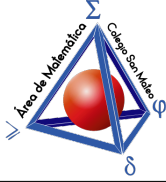
La condición se saca $\frac{1}{8}$ de lo que falta por llenar, la podemos expresar como

$$\frac{c}{6} - \frac{1}{8} \cdot \frac{5c}{6} = \frac{c}{16}$$

Finalmente la condición se agrega $\frac{1}{5}$ de lo que queda, se obtiene 90 litros

$$\begin{aligned}\frac{c}{16} + \frac{c}{16} \cdot \frac{1}{5} &= 90 \\ \frac{3c}{40} &= 90 \\ c &= 1200\end{aligned}$$

luego, lo que contenía inicialmente era $\frac{1}{6} \cdot 1200 = 200$ y la cuarta parte es 50 litros.



ETAPA 1
XXI JUEGOS MATEMÁTICOS
INTERREGIONALES
2022



- Selección múltiple. Encierra en un círculo la letra de la alternativa correcta. Debes justificar tu respuesta. (3 pt. c/u)

1. Si $ab = b^2 = 3$, entonces el valor de ab^{ab} es

RESPUESTA:

$$\begin{aligned} ab^{ab} &= ab^{ab^3} \\ &= ab^{ab \cdot b^2} \\ &= ab^{3 \cdot b^2} \\ &= a \left(b^{b^2} \right)^3 \\ &= a \cdot 3^3 \\ &= 27a \end{aligned}$$

2. Un granjero tiene un total de 56 aves entre pollos, patos y pavos. Si tuviera 3 pollos más, 7 patos menos y 5 pavos más, tendría la misma cantidad de cada tipo de aves ¿ Cuántos patos son?

RESPUESTA:

Sean las incognitas: cantidad de pollos = x , cantidad de patos = y , cantidad de pavos = z .
Tenemos las siguientes ecuaciones:

a) $x + y + z = 56$

b) $\underbrace{x + 3}_{(1)} = \underbrace{y - 7}_{(2)} = \underbrace{z + 5}_{(3)}$

Despejando x de la igualdad de (1) y (2), se tiene

$$x = y - 10$$

Despejando z de la igualdad de (2) y (3), se tiene

$$z = y - 12$$

Reemplazando x e y en la primera igualdad, se tiene:

$$\begin{aligned} x + y + z &= 56 \\ y - 10 + y + y - 12 &= 56 \\ 3y - 22 &= 56 \\ 3y &= 78 \\ y &= 26 \end{aligned}$$

Por lo tanto, la cantidad de patos es 26.



ETAPA 1
XXI JUEGOS MATEMÁTICOS
INTERREGIONALES
2022



3. Una persona ha estado caminando durante 20 horas. Si hubiera caminado 2 horas menos, pero con una rapidez mayor en 10 Km/h, habría recorrido 10 km menos. ¿Cuál es su rapidez?

RESPUESTA:

Sabemos que la distancia d que recorrió es $20r$, donde r es la rapidez. Luego, al plantear la ecuación tenemos:

$$\begin{aligned}18 \cdot (r + 10) &= 20r - 10 \\18r + 180 &= 20r - 10 \\190 &= 2r \\r &= 95\end{aligned}$$

Por lo tanto la rapidez es de 95 Km/h.

4. Si a es el 10% de la suma de c y d , además c representa el 20% de la suma de a y d . Entonces la razón entre a y c es

RESPUESTAS:

Del enunciado podemos obtener las siguientes igualdades:

$$\begin{aligned}a &= \frac{c + d}{10} \\10a &= c + d \\d &= 10a - c\end{aligned}$$

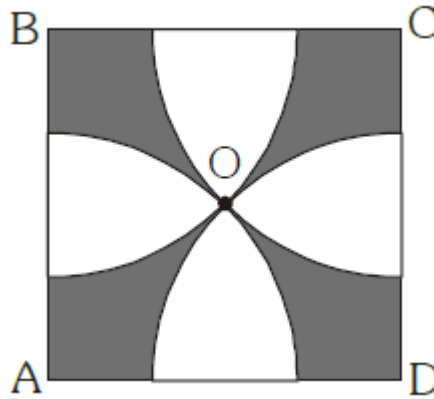
y

$$\begin{aligned}c &= \frac{a + d}{5} \\5c &= a + d \\d &= 5c - a\end{aligned}$$

igualando ambas ecuaciones, se tiene:

$$\begin{aligned}10a - c &= 5c - a \\11a &= 6c \\ \frac{a}{c} &= \frac{6}{11}\end{aligned}$$

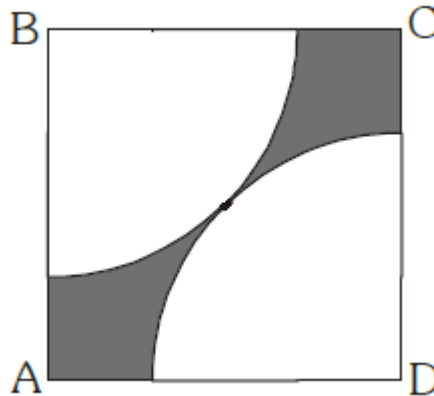
5. Sabiendo que $ABCD$ es un cuadrado de 4 m de lado y que O es centro del cuadrado, donde se interceptan los arcos de circunferencia con centro en los vértices del cuadrado. ¿Cuál es el área de la región sombreada?



RESPUESTA:

Notemos que el área pedida, equivale al doble del área sombreada de la siguiente figura

Figura 1:



la que se puede obtener calculando el área del cuadrado y restando los dos cuartos de círculo. Para ello, debemos considerar que la diagonal BD mide $4\sqrt{2}$, por lo que el radio de cada cuarto de círculo es $2\sqrt{2}$. Luego

$$\begin{aligned}
 \text{Área sombreada} &= 2 \cdot \text{Área Figura 1} \\
 &= 2 \cdot [\text{Área cuadrado} - 2 \cdot \text{Área cuarto de círculo}] \\
 &= 2 \cdot \left[16 - 2 \cdot \frac{\pi \cdot (2\sqrt{2})^2}{4} \right] \\
 &= 2 \cdot \left[16 - \frac{\pi \cdot 8}{2} \right] \\
 &= 32 - 8\pi \\
 &= 8(4 - \pi)
 \end{aligned}$$