PRUEBA 1
SERIE 1° - 2° MEDIO

Indicación: Justifica cada uno de tus resultados. La respuesta o la alternativa sin justificación tiene puntaje 0. Los primeros 3 problemas valen 5 puntos cada uno y los problemas con alternativas valen 3 puntos cada uno.

1. Problema 1:

Llamaremos S al resultado de la suma

$$1 \cdot 1^2 + 2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 3^2 + \ldots + 2022 \cdot 2022^2 + 2023 \cdot 2023^2$$

¿Cuál es el valor del dígito de la unidad de S?

1.1. Solución:

Notemos que S es equivalente a

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + 2022^3 + 2023^3$$

Investigaremos de manera inductiva.

N°	Suma abreviada	valor de la suma	expresión equivalente
1	1^3	1	1^2
2	$1^3 + 2^3$	9	3^2
3	$1^3 + 2^3 + 3^3$	36	6^2
4	$1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3$	100	10^2
5	$1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3$	225	15^2
6	$1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3 + 6^3$	441	21^2
7	$1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3 + 6^3 + 7^3$	784	28^2

Podemos observar que la base de la potencia que se obtiene en la expresión equivalente, corresponde a la suma de las bases de las potencias de los sumandos. Por lo que para resolver el problema, solo bastaría conocer la unidad de la suma

$$1 + 2 + 3 + 4 + \ldots + 2002 + 2023$$

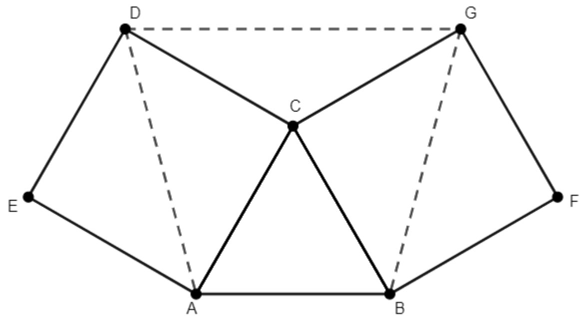
la que podemos obtener fácilmente ordenando esta suma de Gauss

$$\begin{aligned}
(1 + 2 + 3 + 4 + \ldots + 2002) + 2023 &= (1 + 2022) + (2 + 2021) + (3 + 2020) + \ldots + (1011 + 1012) + 2023 \\
&= (2023) + (2023) + (2023) + \ldots + (2023) + 2023 \\
&= 1012 \cdot 2023
\end{aligned}$$

Por lo tanto, el resultado de la suma será $S = (1012 \cdot 2023)^2$ donde el valor de la unidad es 6.

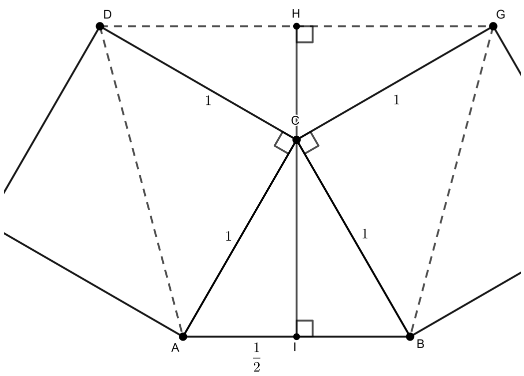
2. Problema 2:

En la figura, ΔABC es equilátero cuyo lado mide 1. Sobre los lados BC y AC se construyen los cuadrados $BFGC$ y $ACDE$ ¿Cuánto mide el área del cuadrilátero $ABGD$?



2.1. Solución:

Primero trazaremos la altura del ΔABC que pasa por C y prolongamos hasta que intercepte a DG



obteniendo las siguientes medidas:

1. $AD = BG = \sqrt{2}$ Por teorema de pitágoras
2. $CI = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ por teorema de pitágoras

Luego, el ΔCHG tiene ángulos interiores de $60°$, $90°$ y $30°$ respectivamente, por lo que corresponde a una mitad de un triángulo equilátero también, donde $HC = \dfrac{1}{2}$ y HG es altura, que por el teorema de pitágoras mide $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

Finalmente el área pedida corresponde a un trapecio (alternativamente podría ser descompuesto en triángulos), cuya área es:

$$\begin{aligned}\frac{AB+DG}{2}\cdot IH &= \frac{1+\sqrt{3}}{2}\cdot\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\right)\\ &= \frac{1+\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1+\sqrt{3}}{2}\\ &= \frac{(1+\sqrt{3})^2}{4}\end{aligned}$$

3. Problema 3:

Sea f una función tal que $f(1) = 3$. Si

$$f(1 + x) = f(1) + f(x)$$

Calcula el valor de $f(2023)$

3.1. Solución:

Haciendo algunos cálculos, tenemos

1.
$$\begin{aligned} f(2) &= f(1+1) \\ &= f(1) + f(1) \\ &= 3 + 3 \\ &= 6 \end{aligned}$$

2.
$$\begin{aligned} f(3) &= f(1+2) \\ &= f(1) + f(2) \\ &= 3 + 6 \\ &= 9 \end{aligned}$$

3.
$$\begin{aligned} f(4) &= f(1+3) \\ &= f(1) + f(3) \\ &= 3 + 9 \\ &= 12 \end{aligned}$$

4.
$$\begin{aligned} f(5) &= f(1+4) \\ &= f(1) + f(4) \\ &= 3 + 12 \\ &= 15 \end{aligned}$$

Podemos observar como a medida que vamos dando valores a x se va obteniéndo como resultado de la función un múltiplo de 3, de esta forma podemos conjeturar la siguiente expresión

$$f(x) = 3x$$

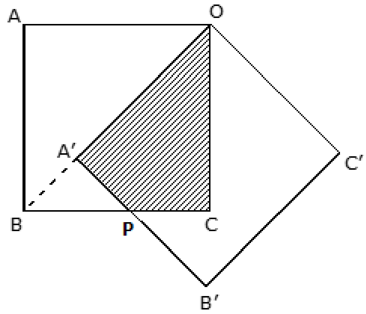
Por lo tanto, $f(2023) = 3 \cdot 2023 = 6069$

1. Joaquín y Emilia hacen una carrera de 100 metros, ganando Emilia con 10 metros de ventaja sobre Joaquín. Al otro día deciden repetir la carrera anterior, pero esta vez Emilia partirá 10 metros más atrás del punto de partida y prometen correr a la misma rapidez que el día anterior. ¿Quién gana esta nueva carrera?

   Solución:
   De la carrera de 100 metros inicial, sabemos que Emilia le gana a Joaquín por 10 metros de diferencia, es decir que cuando Emilia ha recorrido 100 metros, Joaquín ha recorrido 90. En la segunda carrera Emilia parte 10 metros más atrás y si corren de la misma manera que el día anterior cuando Emilia haya recorrido 100 metros (es decir vaya en los 90 metros), Joaquín irá en los 90 metros también, por lo que la carrera la gana Emilia nuevamente.

2. La figura muestra dos cuadrados congruentes $ABCO$ y $A'B'C'O$, ambos de lado 2 cm. Si A' está en la diagonal OB, ¿Cuánto mide el área sombreada?
   Solución:
   Sea P el punto de intersección entre los lados $A'B'$ y BC. Notemos que el área sombreada se puede obtener calculando

$$Area_{\Delta OBC} - Area_{\Delta A'BP}$$



   a) El área del ΔOBC es 2.
   b) Para calcular el área del $\Delta A'BP$, debemos notar que es rectángulo isósceles en A', luego

$$\begin{aligned} A'B &= OB - OA' \\ &= 2\sqrt{2} - 2 \end{aligned}$$

   Pues OB es diagonal y OA' es lado. Finalmente

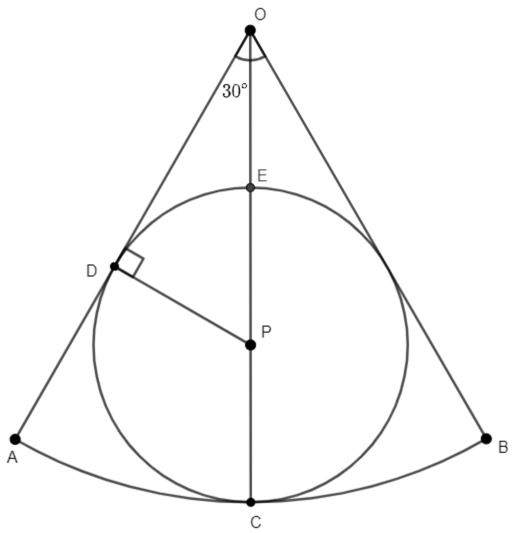
$$\begin{aligned} Area_{\Delta A'BP} &= \frac{A'B^2}{2} \\ &= \frac{\left(2\sqrt{2}-2\right)^2}{2} \\ &= \frac{8 - 8\sqrt{2} + 4}{2} \\ &= 6 - 4\sqrt{2} \end{aligned}$$

   Por lo tanto, el área pedida es $2 - \left(6 - 4\sqrt{2}\right) = 4\sqrt{2} - 4$ que corresponde a la alternativa d

3. La figura muestra un sector circular de centro O y radio $OA = OB$ que tiene inscrita una circunferencia de radio $\frac{1}{2}$. ¿Cuál es la medida del arco AB?

Solución:

Dibujando el centro de la circunferencia P, el segmento OC que pasa por P y el radio PD que es perpendicular a OA.



Para calcular la medida del arco AB, debemos notar que corresponde a $\frac{1}{6}$ del perímetro de la circunferencia de centro O que lo contiene, por lo que bastaría con encontrar la medida de $OA = OC = OB$.

Primero, notemos que el ΔOPD tiene ángulos interiores de $30°$, $60°$ y $90°$, por lo que corresponde a la mitad de un triángulo equilátero, donde la altura es OD.

Como $DP = PC = PE = \frac{1}{2}$ y $2 \cdot PD = PO$, se tiene que

$$OC = 3 \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

Por lo tanto, arco $AB = \frac{2 \cdot \pi \cdot OC}{6} = \frac{3\pi}{6} = \frac{\pi}{2}$, que corresponde a la alternativa c.

4. La suma $1-4+9-16+25-36+\ldots+99^2-100^2$ es igual a

Solución:

Sea $X=1-4+9-16+25-36+\ldots+99^2-100^2$. Para resolver esta suma, nos servirá ordenar de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
X &= 1-4+9-\ldots+99^2-100^2\\
&= 1^2-2^2+3^2-4^2+5^2-6^2\ldots+99^2-100^2\\
&= (1^2-2^2)+(3^2-4^2)+(5^2-6^2)\ldots+(97^2-98^2)+(99^2-100^2)\\
&= (1+2)(1-2)+(3+4)(3-4)+(5+6)(5-6)+\ldots+(97+98)(97-98)+(99+100)(99-100)\\
&= 3\cdot(-1)+7\cdot(-1)+11\cdot(-1)+\ldots+195\cdot(-1)+199\cdot(-1)\\
&= -1\cdot(3+7+11+\ldots+195+199)\\
&= -1\cdot[(3+199)+(7+195)+(11+191)+\ldots+(99+103)]\\
&= -1\cdot(25\cdot 202)\\
&= -1\cdot 5050\\
&= -5050
\end{aligned}$$

que corresponde a la alternativa d.

5. La crema contiene aproximadamente, 22 % de grasa. ¿Cuántos litros de crema se deben mezclar con leche al 2 % de grasa, para obtener 20 litros de leche con 4 % de grasa?

Solución:
Sea x la cantidad de litros de crema y sea $(20-x)$ la cantidad de leche que se debe mezclar. La condición del problema pide que:

$$\begin{aligned}
\frac{22}{100}\cdot x+\frac{2}{100}\cdot(20-x) &= \frac{4}{100}\cdot 20 \qquad /\cdot 100\\
22x+2(20-x) &= 80\\
22x+40-2x &= 80\\
20x &= 40\\
x &= 2
\end{aligned}$$

Por lo tanto se necesita 2 litros de crema, alternativa a