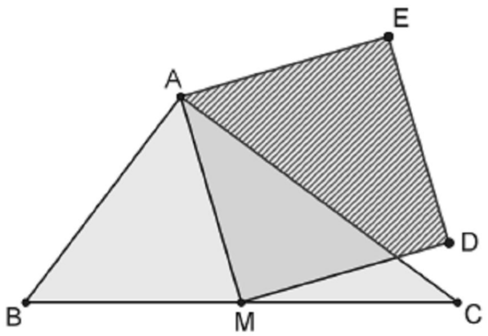
PAUTA PRUEBA 1

Serie 3° - 4° Medio

I **Resolución de problemas:** En este item deberán resolver 3 problemas con enunciado y deben colocar todo el desarrollo de manera clara y ordenada. Cada problemas resuelto de manera correcta tendrá una puntuación de **5 puntos c/u**

1) Sea ABC el triángulo de la figura adjunta, tal que $AB = 6\ cm$, $AC = 8\ cm$, $BC = 10\ cm$ y M el punto medio de BC. Considerando que $AMDE$ es un cuadrado, y que MD intersecta a AC en un punto F, determina el área del cuadrilátero $AFDE$ en cm^2.



Desarrollo:

1° Dado que los lados del triángulo ABC que miden 6, 8 y 10 satisfacen el teorema de pitágoras, entonces el triángulo ABC es rectángulo. Luego, por propiedad, la transversal de gravedad AM tiene la misma medida que los segmentos BM y MC formados sobre la hipotenusa. Es decir,

$$AM = BM = MC = 5\ cm$$

2° Dado que AM mide 5 cm, el cuadrado $AMDE$ tiene un área de 25 cm^2, es decir

$$A_{(AMDE)} = 25\ cm$$

3° Dado que $BM = AM = MC$, los tríangulos ABM y AMC son isósceles en M, por tanto los ángulos MBA y BAM son de igual medida, y llamaremos a estos ángulos α, es decir

$$\angle MBA = \angle BAM = \alpha$$

De igual manera,

$$\angle MAC = \angle ACM = \beta$$

Y además $\alpha + \beta = 90$. Por tanto, como $AMDE$ es un cuadrado, $\angle FMA = 90$ y $\angle AFM = \alpha$. Luego, por esto último se concluye que

$$\Delta BCA \sim \Delta FAM$$

4° Por la semejanza de triángulos tenemos que:

$$\frac{AC}{AM} = \frac{BA}{FM} \iff \frac{8}{5} = \frac{6}{FM} \iff FM = \frac{15}{4}$$

De esta manera el Área del triángulo FAM es de $\dfrac{75}{8}\ cm^2$

5° Finalmente, el área del cuadrilátero $AFDE$ es igual a la diferencia del área del cuadrado $AMDE$ con el área del triángulo FAM, es decir:

$$A_{AFDE} = A_{AMDE} - A_{FAM} = 25 - \frac{75}{8} = \frac{125}{8}$$

2) La lista $(1, x_2, x_3, x_4, ..., x_n, 1000)$ es la sucesión más larga de enteros positivos tal que cada término, **a partir del tercero**, es la suma de todos los anteriores (por ejemplo $x_3 = 1 + x_2$ y $x_4 = 1 + x_2 + x_3$ y así sucesivamente). ¿Cuál es el valor numérico de x_2?

Desarrollo:

1° Por definición tenemos que

$x_3 = 1 + x_2$
$x_4 = 1 + x_2 + x_3 = 2(1 + x_2) = 2^1(1 + x_2) = 2^{4-3}(1 + x_2)$
$x_5 = 1 + x_2 + x_3 + x_4 = 4(1 + x_2) = 2^2(1 + x_2) = 2^{5-3}(1 + x_2)$
$x_6 = 1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 8(1 + x_2) = 2^3(1 + x_2) = 2^{6-3}(1 + x_2)$
$x_7 = 1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 16(1 + x_2) = 2^4(1 + x_2) = 2^{7-3}(1 + x_2)$
$x_8 = 1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 = 32(1 + x_2) = 2^5(1 + x_2) = 2^{8-3}(1 + x_2)$
$\vdots$
$x_n = 1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + ... + x_{n-1} = 2^{n-3}(1 + x_2)$

$1000 = 1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + ... + x_n = 2^{n+1-3}(1 + x_2)$

Luego,

$$1000 = 2^{n-2}(1 + x_2)$$

Por otra parte, por descomposición de factores primos se tiene que: $1000 = 2^3 \cdot 5^3$

Luego,

$$2^3 \cdot 5^3 = 2^{n-2}(1 + x_2)$$

2° Por la descomposición anterior se concluye que $2^3 = 2^{n-3}$ y $n = 6$ y por tanto $1 + x_2 = 125$, es decir

$$x_2 = 124$$

3) Sean a, b y c números reales **no negativos** Si se sabe que dos de los números $\dfrac{a}{b+c}$, $\dfrac{b}{c+a}$ y $\dfrac{c}{a+b}$ son iguales a $\dfrac{1}{2}$ y 2, ¿cuál es el otro número?

Desarrollo:

Sin perder generalidad, escogemos dos de los tres números y los igualamos a sus respectivos valores. Es decir,

$$\frac{a}{b+c} = \frac{1}{2} \qquad \text{y} \qquad \frac{b}{c+a} = 2$$

Lo que es equivalente a

$$2a - b - c = 0 \qquad \text{y} \qquad 2a + 2c - b = 0$$

Despejando la incógnita b de ambas ecuaciones se llega a la igualdad y conclusión

$$\begin{aligned} 2a - c &= 2a + 2c \\ c &= 0 \end{aligned}$$

Por lo tanto, el tercer número

$$\frac{c}{a+b} = 0$$

Observación: El enunciado original decía que a, b y c reales positivos y debió haber dicho a, b y c reales no negativos.

II **Selección múltiple:** En este item deberás elegir la alternativa correcta, colocando el desarrollo correspondiente. Cada problema resuelto de manera correcta tendrá una puntuación de **3 puntos c/u**

1) ¿Cuál es el dígito de las unidades del número $21^{2023} + 23^{2023} + 25^{2023}$?

Desarrollo:

Por inducción, tenemos que el último dígito de una potencia de 21 (21^n) siempre termina en 1.

Por otra parte, en el caso de las potencias de 23 (23^n) estas pueden terminar en 3 (si el exponente es multiplo de 4 más 1, 9 (si es el exponente es multiplo de 4 más 2), 7 (si el exponente es un múltiplo de 4 más 3) o 1 (si el exponente es un múltiplo de 4), es decir, en este caso el exponente 2023 es un múltiplo de 4 más 3, luego 23^{2023} es un número que termina en 7.

En el caso de las potencias de 25 (25^n) siempre terminan en 5.

Finalmente podemos concluir que $21^{2023} + 23^{2023} + 25^{2023}$ resulta un número que termina en:

... 1+... 7+.... 5 = ... 3

Respuesta: Alternativa B

2) Raquel se dio cuenta de que su edad, la de su hija y la de su nieta son tres números que cumplen que, al ser divididos por un impar mayor a 1, el resultado nunca es entero. Al sumar las tres edades, Raquel obtiene 100 años. ¿Cuántos años tiene la nieta de Raquel?

Desarrollo:

Dado que las edades son números que al ser divididos por un impar mayor que 1 nunca resulta entero, esto implica que los números son potencias de 2, es decir, 2, 4, 8, 16, 32, 64. Por otra parte la suma de las edades es 100. luego, con esto se concluye que las edades son 64, 32 y 4.

Respuesta: Alternativa C

3) $\sqrt{7+\sqrt{13}} - \sqrt{7-\sqrt{13}} =$

Desarrollo:

Igualando nuestra expresión a un cierto número x, tenemos que:

$$\sqrt{7+\sqrt{13}} - \sqrt{7-\sqrt{13}} = x$$

Luego, elevando a 2

$x^2 = 7 + \sqrt{13} - 2(\sqrt{7+\sqrt{13}})(\sqrt{7-\sqrt{13}}) + 7 - \sqrt{13}$

$x^2 = 14 - 2(\sqrt{49 - 13})$

$x^2 = 14 - 2(\sqrt{36})$

$x^2 = 2$

$x = \sqrt{2}$

Respuesta: Alternativa C

4) Si $x \in [-1, 1[$ y se sabe que g es una función tal que $g\left(\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}\right) = 5x$, entonces el valor de $g(2)$ es

Desarrollo:

Dado que buscamos $g(2)$, entonces existe $x \in [-1, 1[$ tal que $\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}} = 2$, es decir

$$\frac{1+x}{1-x} = 4$$

$$1 + x = 4 - 4x$$

$$x = \frac{3}{5}$$

Luego,

$$g(2) = 5 \cdot \frac{3}{5}$$

$$g(2) = 3$$

Respuesta: Alternativa C

5) Si $x + y = 2$ y $x^3 + y^3 = 3$, ¿cuál es el valor de xy?

Desarrollo:

Si $x + y = 2$, entonces $(x + y)^3 = 8$, es decir, $x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3 = 8$, y como $x^3 + y^3 = 3$, luego $3x^2y + 3xy^2 = 5$

Por factorización tenemos que, $3xy(x + y) = 5$, es decir $xy = \dfrac{5}{6}$

Respuesta: Alternativa B